Klausur

Übungen zu den Vorlesungen „Einführung in die Materialphysik" und „Festkörpermechanik"

WS 1996/97

Termin:	13. Februar 1996, 8.00 Uhr Seminarraum Seestr. 71
Bearbeitungsdauer:	90 Minuten
Gesamtpunktzahl:	39
Erforderliche Punktzahl:	20

Für die Erlangung des Übungsscheines ist die erfolgreiche Teilnahme an der Klausur erforderlich.

Aufgabe 1

Ein elastisch isotropes Material mit einem Elastizitätsmodul von $E = 200\ GPa$ und einem Schermodul von $G = 75\ GPa$ wird in einen Spannungszustand versetzt, der durch folgenden Spannungstensor beschrieben wird:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 20 & -15 \\ 20 & 10 & 20 \\ -15 & 20 & 35 \end{pmatrix} MPa$$

a) Berechne den Kompressionsmodul K und die Querkontraktionszahl ν des Materials (2 Punkte).

b) Berechne die bei der Aufbringung des Spannungszustandes auftretende relative Volumenänderung $\Delta V/V$ unter der Annahme, daß nur linear-elastische Dehnungen auftreten (2 Punkte).

c) Berechne den deviatorischen Anteil des Spannungstensors und zerlege ihn in fünf unabhängige reine Scherspannungszustände. (2 Punkte)

Aufgabe 2

Betrachte einen Magnesium-Matrix-Verbundwerkstoff, der unidirektional mit SiC-Fasern verstärkt ist. Der *Volumen*anteil der Fasern betrage 15%.

a) Welche Dichte besitzt der Verbundwerkstoff? (1 Punkt)

a) Schätze ab, in welchem Intervall die richtungsabhängigen E-Modul-Werte des Materials liegen (3 Punkte).

b) Die SiC-Fasern werden nun duch C-Fasern ersetzt. Welcher Faser-*Volumen*anteil wird benötigt, damit sich bei bei Belastung parallel zu den Fasern der gleiche 35% E-Modul ergibt wie zuvor? Welche Dichte besitzt dieser Mg_{Matrix}-C_{Faser}-Verbundwerkstoff? (3 Punkte)

Material	E-Modul [GPa]	Dichte [g/cm^3]
Magnesium	44	1,8
SiC-Fasern	460	3,2
C-Fasern	220	1,8

Aufgabe 3

Zeichne zu jedem der folgenden Gleitsysteme die Gleitebene und die Gleitrichtung in eine Elementarzelle ein (für jedes Gleitsystem eine separate Zeichnung; es ist jeweils nur ein ganz bestimmtes Gleitsystem gefragt; Koordinatensystem jeweils angeben!):

Gib für jedes Gleitsystem den Betrag des Burgersvektors an (in Einheiten der Gitterkonstanten)

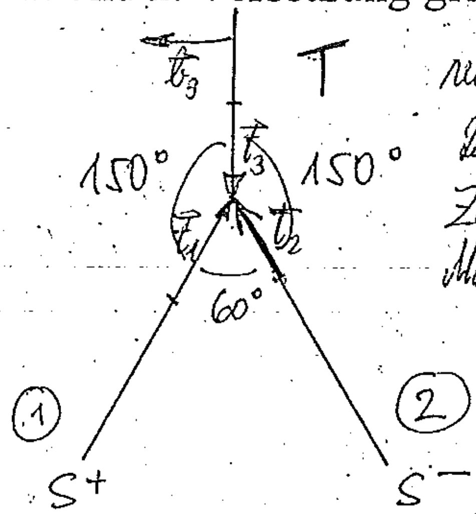
krz: $\frac{a\sqrt{3}}{2} = |\vec{b}|$
hdp: $|\vec{b}| = a$
kfz: $\frac{a\sqrt{2}}{2} = |\vec{b}|$

Material / Kristallstruktur	Gleitsystem
α-Fe / krz	$(01\bar{1})[111]$
Cu / kfz	$(11\bar{1})[011]$
Mg / hdp	$(0001)[11\bar{2}0]$
Ti / hdp	$(01\bar{1}0)[\bar{2}110]$
NiAl / CsCl-Struktur $|\vec{b}| = a$ krz	$(110)[001]$

(5 Punkte)

Aufgabe 4

Bestimme mit Hilfe der Frank-Regel den Typ (einschließlich Vorzeichen) der 3. Versetzung, wobei die Beträge der Burgersvektoren der 1. und 2. Versetzung gleich sind.
(3 Punkte)



rechte Hand Regel:
Daumen ≙ Linienvektor $\vec{t}$
Zeigefinger ≙ Burgersv. $\vec{b}$
Mittelfinger ≙ Halbebene

Aufgabe 5

Der Potentialverlauf $U(r)$ für die Bindung zwischen zwei Atomen läßt sich folgendermaßen beschreiben:

$$U(r) = -\frac{A}{r^m} + \frac{B}{r^n}$$

a) Skizziere den Verlauf von $U(r)$. Zeichne den Gleichgewichtsabstand r_0 und die Bindungsenergie U_0 ein. Gib r_0 und U_0 in Abhängigkeit von A und B an.
(3 Punkte)

b) Gib die Kraft an, die nötig ist, um die Bindung zu trennen
(3 Punkte) $F(r) = \frac{dU}{dr}$?

c) Welche Spezialfälle für m kennen Sie, zu welchen Bindungstypen gehören diese? (2 Punkte)

Übungen "Festkörpermechanik / Einf. Materialphysik" WS 1995/96 KLAUSUR 13.2.97
Universität Stuttgart, 2. Lehrstuhl für Metallkunde, Prof. Arzt / Dr. Wanner / Dr. Gumbsch

Aufgabe 6

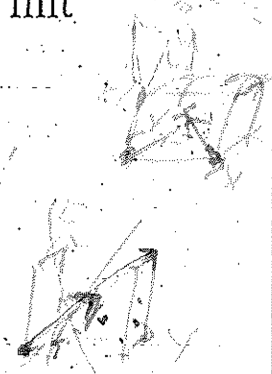
Erläutere in Worten den Unterschied zwischen Energieelastizität und Entropieelastizität. Gib für beide Fälle jeweils die grundlegende Formel und ein typisches Material an. (4 Punkte).

Energieelastizität $E = \frac{1}{\Omega} \frac{d^2U}{d\varepsilon^2}$

Entropieelastizität $E = \frac{-T}{\Omega} \frac{d^2S}{d\varepsilon^2}$

Aufgabe 7

Gegeben sei eine Versetzung in einem kubischen Gitter mit dem Burgersvektor $\bar{b} = \frac{a}{2}[111]$ und dem Linienvektor $\bar{t} = \frac{1}{\sqrt{6}}[\bar{2}11]$.



Es herrsche eine einachsige äußere Spannung σ_{xx}.

a) Zeichne eine Elementarzelle, in die ein Segment der Versetzungslinie und der Burgersvektor eingezeichntet ist. (2 Punkte).

b) Welche Kraft wirkt auf die Versetzung? (2 Punkte)

c) Zerlege die Kraft in eine Gleit- und eine Kletterkomponente. (2 Punkte)

Klausur 2

Aufg. 1:

$E = 120\ GPa$

$\nu = 0{,}25$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 16 \\ 4 & 12 & 4 \\ 16 & 4 & 10 \end{pmatrix} MPa$$

a) <u>es gilt:</u>

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{11}-\sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma_m \end{pmatrix}$$

<u>und:</u> $\sigma_m = \frac{1}{3}(\text{Spur}) = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$

<u>Deviatorischer Anteil:</u> $\boxed{\frac{1}{3}\cdot\text{Spur} = 32 : 3 = \frac{32}{3}}$

$$\sigma_{ij}^D = \begin{pmatrix} \frac{30}{3}-\frac{32}{3} & 4 & 16 \\ 4 & \frac{36}{3}-\frac{32}{3} & 4 \\ 16 & 4 & \frac{30}{3}-\frac{32}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{12}{3} & \frac{48}{3} \\ \frac{12}{3} & \frac{4}{3} & \frac{12}{3} \\ \frac{48}{3} & \frac{12}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 12 & 48 \\ 12 & 4 & 12 \\ 48 & 12 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 & 6 & 24 \\ 6 & 2 & 6 \\ 24 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

②

3) Hauptspannungen:

→ Charakterist. Polynom: $\boxed{|\sigma_{ij} - \lambda \cdot E| = 0}$

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & 4 & 16 \\ 4 & 12-\lambda & 4 \\ 16 & 4 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda)^2(12-\lambda) + 256 + 256 - 16(10-\lambda) - 16(10-\lambda) - 256(12-\lambda) =$$

$$= \underline{-\lambda^3 + 32\lambda^2 - 52\lambda - 1680 = 0}$$

raten: $\boxed{\lambda_1 = -6}$ $\boxed{\lambda_2 = 10}$ $\boxed{\lambda_3 = 28}$

$$(-\lambda^3 + 32\lambda^2 - 52\lambda - 1680) : (\lambda + 6) = \underline{\underline{-\lambda^2 + 38\lambda - 280}}$$

$$\lambda_{2/3} = \frac{-38 \pm \sqrt{1444 - 1120}}{-2} = \frac{-38 \pm 18}{-2}$$

→ ordne nach Größe: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \Rightarrow$ $\sigma_1 = 28$, $\sigma_2 = 10$, $\sigma_3 = -6$

c) $$\sigma_{ij}^H = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{32}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{32}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow p = -\sigma_m = \underline{\underline{-\frac{32}{3}\,MPa}}$$

es gilt: Hydrostat. Druck:

$$\left. \begin{array}{l} K = \frac{-p}{\frac{\Delta V}{V}} \\ K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \end{array} \right\} \underline{\underline{\frac{\Delta V}{V}}} = -\frac{3p}{E}(1-2\nu)$$

$$= \frac{32\,MPa}{120\,GPa} = \frac{32 \cdot 10^6\,Pa}{120 \cdot 10^9\,Pa} = \underline{\underline{2{,}\overline{6} \cdot 10^{-4}}}$$

$$= 1{,}\overline{3} \cdot 10^{-4}$$

2. (3

d) $\boxed{\text{Mohrsche Spannungskreis:}}$

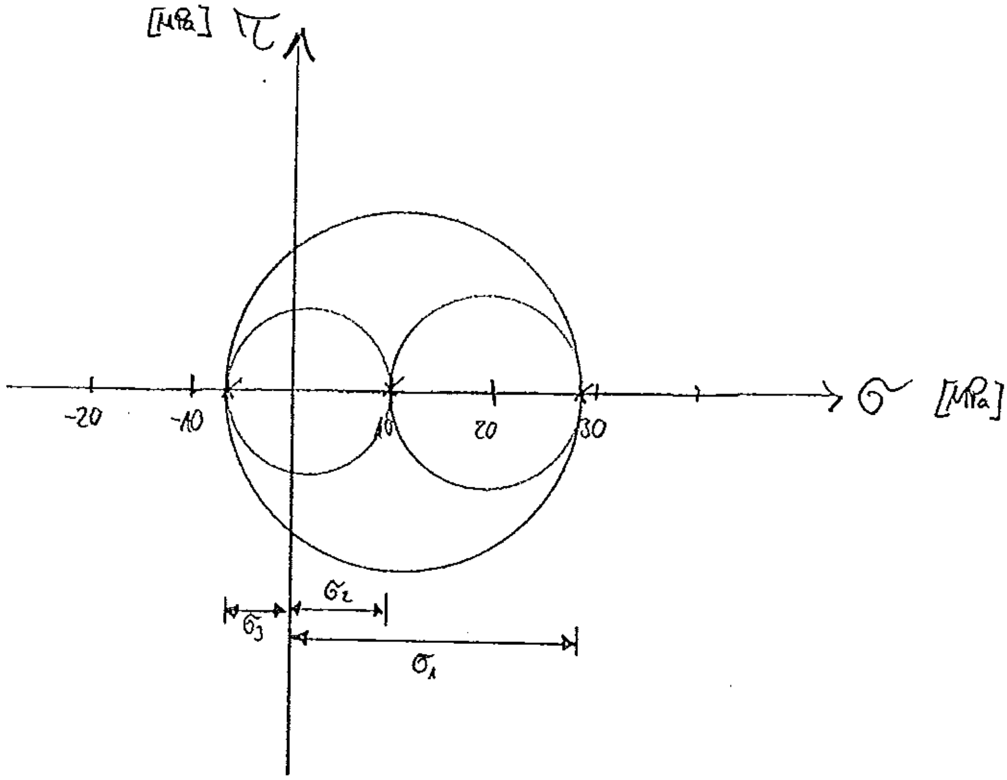
→ betrachte σ_{ij} auf Hauptachsen: (aus Teil b))

$$\boxed{\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 28 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}}$$

$\sigma_1 = 28$ MPa

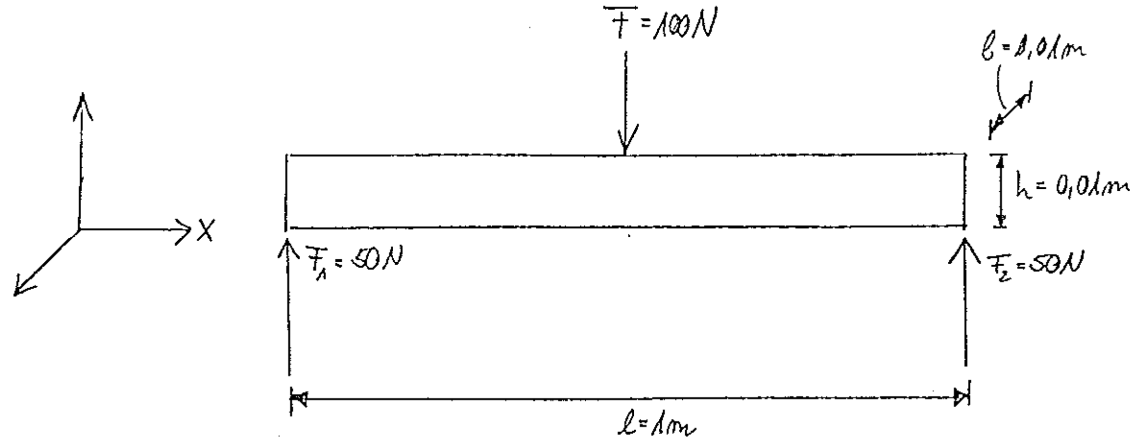
$\sigma_2 = 10$ MPa

$\sigma_3 = -6$ MPa



2.(5

Aufg. 2: Balkenbiegung:



a) Biege-Hauptgleichung: $\boxed{M_b = \sigma_{max} \cdot W}$ $\Longrightarrow$ $\sigma_{max} = \dfrac{M_b}{W}$

?

$$\left.\begin{array}{l} M_b = F_1 \cdot x_1 = 50N \cdot 0{,}5m = 25\,Nm \\ W = \dfrac{b \cdot h^2}{6} = \dfrac{(0{,}01m)^3}{6} = \dfrac{1}{6} \cdot 10^{-6}\,m^3 \end{array}\right\} \sigma_{max} = \dfrac{25\,Nm}{\frac{1}{6} \cdot 10^{-6}\,m^3} = 150\,MPa$$

b) Durchbiegung (f): $\boxed{f = \dfrac{FL^3}{3EI}}$ mit: Aluminium: $E = 70$ GPa; Stahl: $E = 210$ GPa

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{12} \cdot 10^{-8}\,m^4$$

Alu: $f = \dfrac{100N \cdot 1m^3}{3 \cdot 70 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} \cdot \frac{1}{12} 10^{-8}\,m^4} = 0{,}57\,m$

Stahl: $f = \dfrac{100N \cdot 1m^3}{3 \cdot 210 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} \cdot \frac{1}{12} 10^{-8}\,m^4} = 0{,}19\,m$

Fazit: Stahl durchbiegt sich weniger stark!

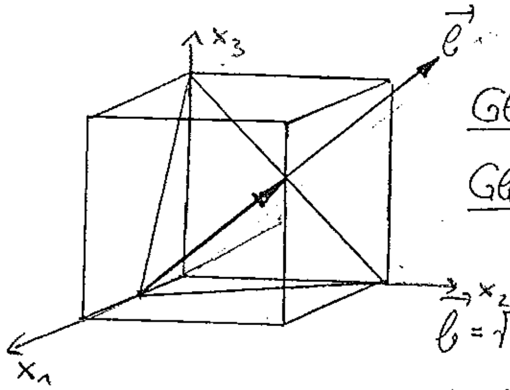
c) $\longrightarrow$ über die „Euler-Kraft" wurde hergeleitet (Aufg. E.5.), daß bezgl. Durchbiegung gilt: $\boxed{m \sim \dfrac{\rho}{\sqrt{E}}}$

$\longrightarrow$ HIER:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Alu: } \dfrac{\rho}{\sqrt{E}} = 1{,}02 \cdot 10^{-5} \\ \text{Stahl: } \dfrac{\rho}{\sqrt{E}} = 1{,}70 \cdot 10^{-5} \end{array}\right\} \text{Alu ist hier geeigneter!}$$

Aufg. 3:

α-Fe: krz



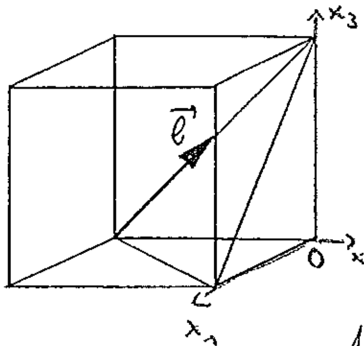
Gleitebene: (211)

Gleitrichtung: $[\bar{1}11]$

$\vec{b} = \sqrt{3}a[\bar{1}11]$

Anzahl Gleitsysteme:

Cu: kfz



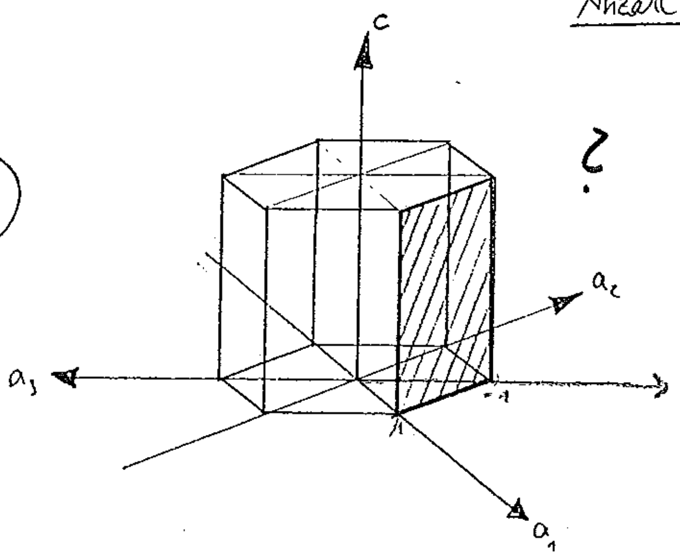
Gleitebene: $(1\bar{1}1)$

Gleitrichtung: [011]

$\vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}a[011]$

Anzahl Gleitsysteme:

Mg: hdp



?

Gleitebene: $(10\bar{1}0)$

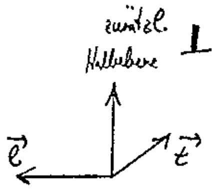
Gleitrichtung: $[11\bar{2}0]$??

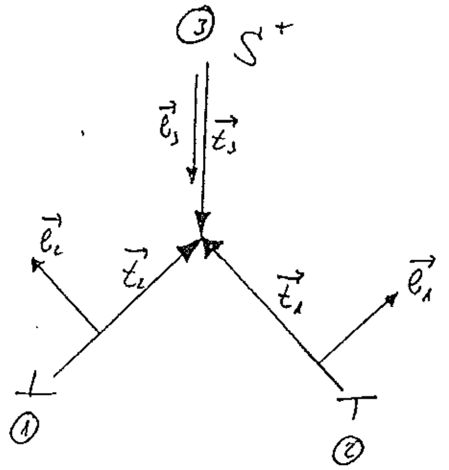
Aufg. ④:

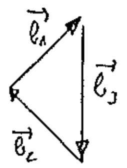
Frank-Regel: $\sum_i \vec{b}_i = 0$
(für V.S.-Knoten)

wichtig: alle $\vec{t}$ zum Knoten hin!

3 Finger-Regel:





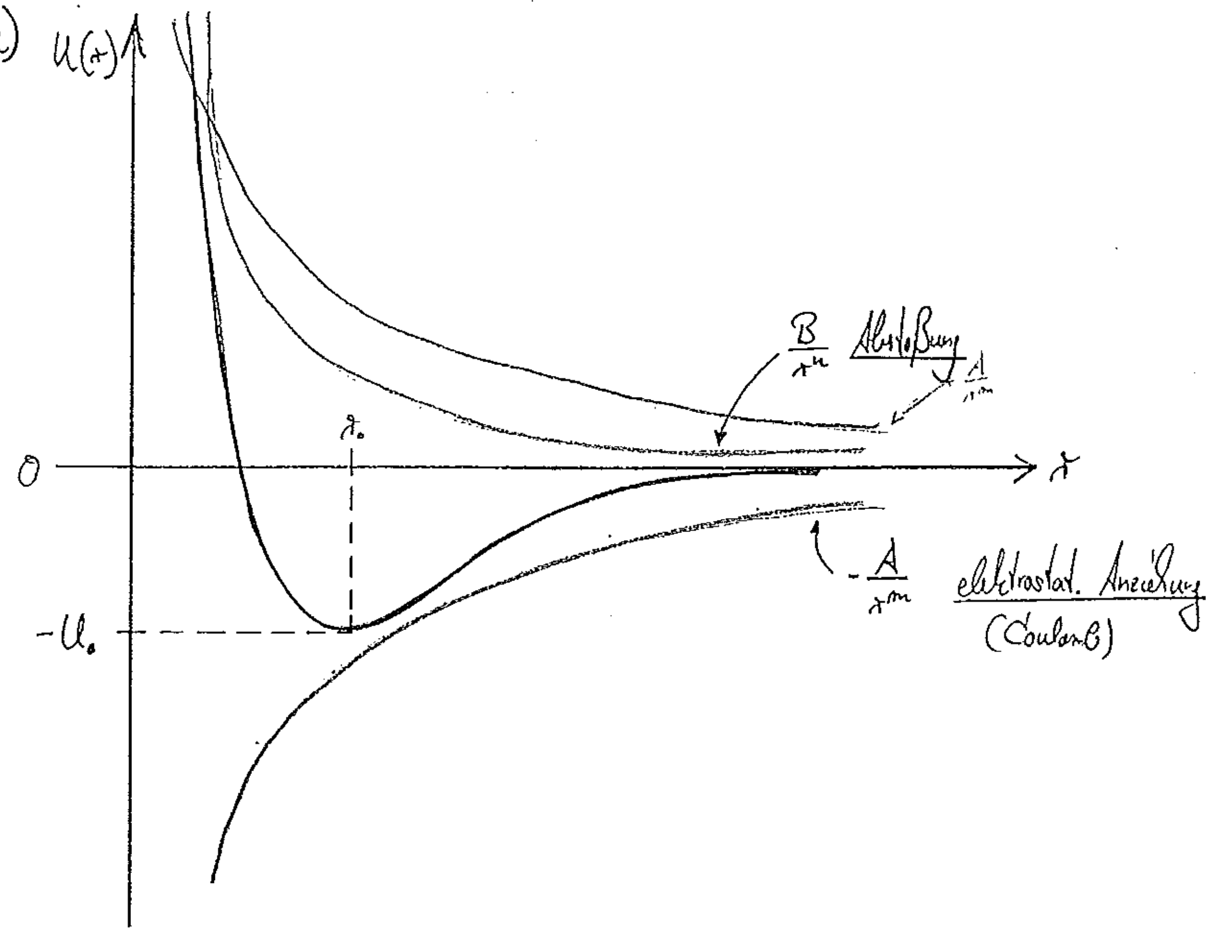


Ergebnis: - für ⊥-Versetzung gilt: $\vec{b} \perp \vec{t}$
- für S-Versetzung gilt: $\vec{b} \parallel t$ → für S^+: $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{t}$
→ für S^-: $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{t}$

$\Longrightarrow$ V.S. ③ ist eine positive Schraubenversetzung!

Aufg. 5: $\boxed{U(r) = -\frac{A}{r^m} + \frac{B}{r^n}}$ Bindungspotential / -energie 2. (J)

a)



b) Geg.: $m = 2$ $\quad r_0 = 3\,\mathring{A} = 3\cdot 10^{-10}\,m$ $\quad$ mit: $1\,eV = 1{,}602\cdot 10^{-19}\,J$

$n = 5$ $\quad U_0 = 5\,eV = 5\cdot(1{,}602\cdot 10^{-19}\,J)$

$$\boxed{A = \frac{n\cdot r_0^m}{n-m}\cdot U_0} \Longrightarrow A = \frac{5\cdot(3\cdot 10^{-10}\,m)^2}{3}\left(5\cdot 1{,}602\cdot 10^{-19}\,J\right) = \underline{\underline{1{,}202\cdot 10^{-37}\,Jm^2}}$$

$$\boxed{B = (r_0)^{n-m}\,\frac{m}{n}\cdot A} \Longrightarrow B = (3\cdot 10^{-10}\,m)^3\cdot\frac{2}{5}\cdot 1{,}202\cdot 10^{-37}\,Jm^2 = \underline{\underline{1{,}298\cdot 10^{-66}\,Jm^5}}$$

beachte Einheiten von A, B: → der Ausdruck $\frac{B}{r^n}$, $-\frac{A}{r^m}$ muß die Einheit J (eV) haben!

c) Bindungsenergie U_0 : - die Krümmung der Potentialmulde ist ein Maß für den E-Modul (10)

- grob gilt: der Wert von $U_0 \sim E$

$U_0 \sim T_M$

Asymmetrie des Bdgs.-Potentials: - hat den thermischen Ausdehnungskoeffizienten zur Folge
-> die Schwingungsmittelpunkte verschieben sich mit höherer Temperatur zu größeren X-Werten

---

Aufg. 6:

1. Steifigkeit: - beschreibt das elastische Verhalten
- Maß für Stärke der elastischen Ausdehnung bei angelegter äußerer Kraft

$\Longrightarrow$ Meßgröße: E-Modul [GPa]

- Maß für den Widerstand, der dieser äußeren Kraft entgegengesetzt wird

2. Festigkeit: - betrachtet den Moment, bei dem Bindung im Material gebrochen werden aufgrund (zu) großer Spannungen
- bei welcher max. Spannung / Scherspannung beginnen Versetzungen zu gleiten

$\Longrightarrow$ Meßgröße: Spannung σ_{max} [MPa]

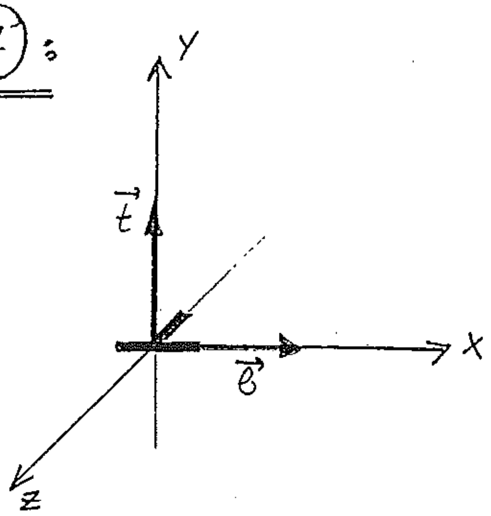
3. Zähigkeit: - Maß für die Beanspruchbarkeit / Lebensdauer eines stark belasteten Bauteils
- wann beginnen sich Risse auszubilden und auszubreiten

$\Longrightarrow$ Meßgröße: $\frac{\text{Energie}}{\text{Flächeneinheit}}$ $\left[\frac{kJ}{m^2}\right]$ Oberflächenenergie γ

- das Widerstreben eines Materials, seine Oberfläche (z.B. durch Rißbildung) zu vergrößern!

Aufg. 7:

a)



$$t_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. (11)

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↳ wirkt auf Stufen-V.S.!

« Peach-Koehler-Kraft »:

$$\underline{\underline{\vec{f}}} = (\sigma \cdot \vec{b}) \times \vec{t}_0$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} b \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -b\,\sigma_{xz} \\ 0 \\ b\,\sigma_{xx} \end{pmatrix}}}$$

b) Gleitkomponente:

$$\underline{\underline{|f_g|}} = \vec{f} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \begin{pmatrix} -b\,\sigma_{xz} \\ 0 \\ b\,\sigma_{xx} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{-b\,\sigma_{xz}}}$$

Kletterkomponente:

$$\underline{\underline{|f_K|}} = \vec{f} \cdot \frac{\vec{t}_0 \times \vec{b}}{|\vec{b}|} = \begin{pmatrix} -b\,\sigma_{xz} \\ 0 \\ b\,\sigma_{xx} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{-b\,\sigma_{xx}}}$$

N.R.: $\vec{t}_0 \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}}}$