

Experimentalphysik II

Diplomstudium Chemie
(Universität Stuttgart)

Verfasser: Oliver Martin
Dozent: Dr. Wolf Wölfel
(im SS 2006)

1. Auflage 2006

Impressum:

© 1. Auflage, Dezember 2006

Alle Rechte auf das vorliegende Werk inklusive aller graphischen Abbildungen sind dem Verfasser vorbehalten.

Oliver Martin
Böblinger Straße 224
70199 Stuttgart

Tel.: 0711 / 23 72 434

E-Mail: mail@olivermartin.org

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

| |
|------------------------------|
| 1. Inhaltsverzeichnis |
|------------------------------|

| |
|----------|
| 1 |
|----------|

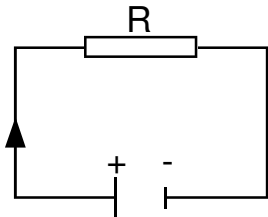
Experimental- physik I

I. Elektrizität

1. Wechselstrom und Wechselstromwiderstände

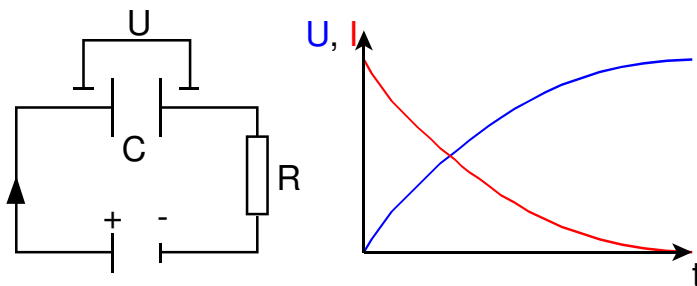
1.1 Zur Erinnerung (im Gleichstromkreis)

Ohm'scher Widerstand:



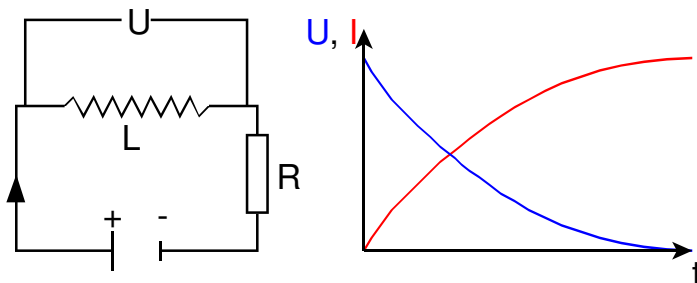
$$R = \frac{U}{I}$$

Kondensator:



Kapazität C

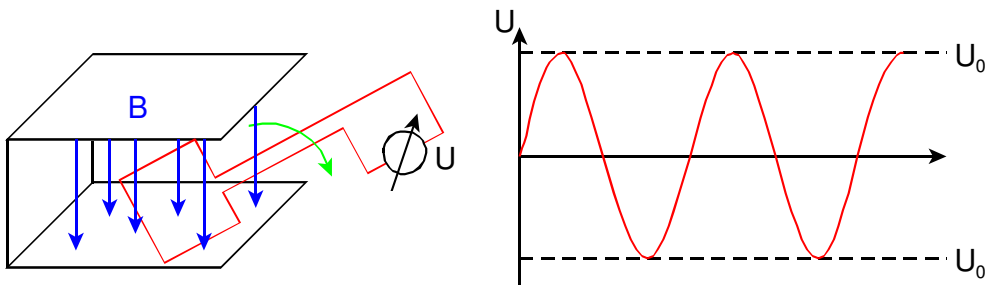
Spule:



Induktivität L

1.2 Experiment: Erzeugen einer Wechselspannung

Leiterschleife im Magnetfeld:



$$U_i = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

mit ω : Kreisfrequenz ($2\pi f$)

1.2.1 Ohm'scher Widerstand

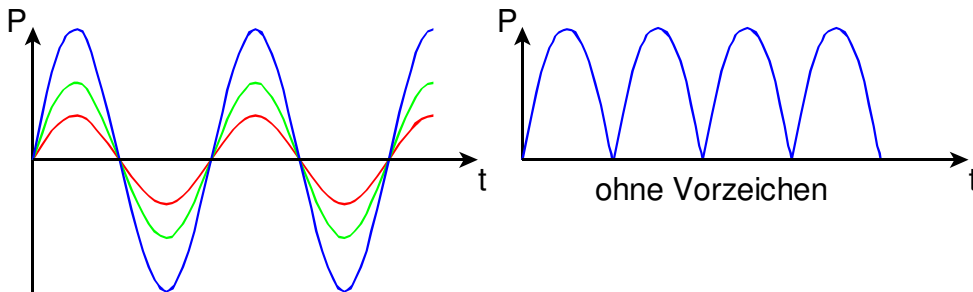
Strom: $I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$

Leistung: $P = U \cdot I$ (am Widerstand verbraucht)

$$P = U(t) \cdot I(t)$$

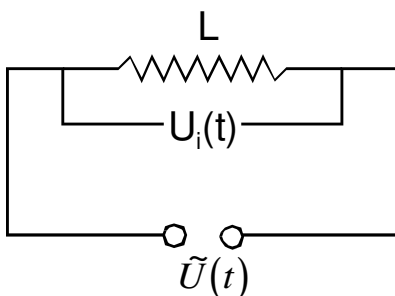
mit $U = R \cdot I_0$ und $I = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$

$$P = R \cdot I_0^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t)$$



$$\bar{P} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot I_0^2$$

1.3 Induktiver Widerstand



1.3.1 Maschenregel

$$U(t) + U_i(t) = 0$$

$$U_i(t) = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$U(t) = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

mit $I = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$

Spannung an Spule: $U(t) = \omega \cdot L \cdot I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$

$$\omega \cdot L = R$$

analog zu $U = R \cdot I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$

1.3.2 Wechselstromwiderstand

$$X_L = \omega \cdot L$$

Eigenschaften: $X_L \sim \omega$

1.3.3 Phasenverschiebung

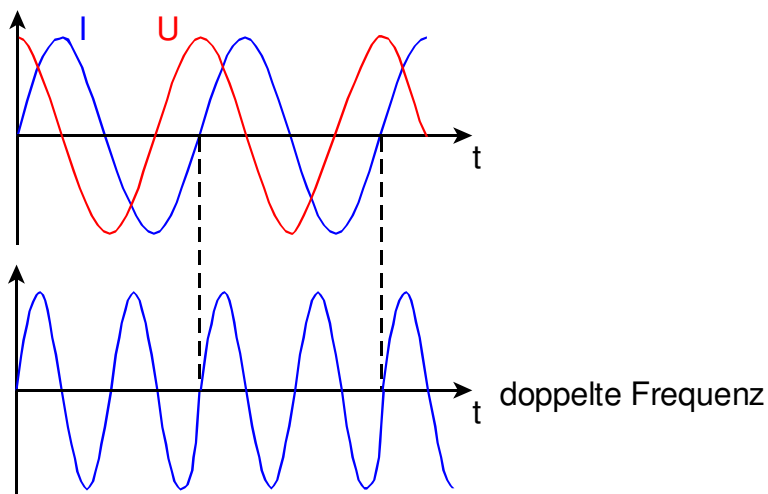
Bei Induktivität (Spule) läuft der Strom der Spannung um $\pi/2$ hinterher.

1.3.4 Leistung

$$P(t) = U(t) \cdot I(t)$$

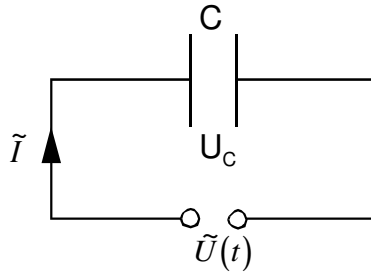
$$P(t) = \omega \cdot L \cdot I_0^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$P(t) = 1/2 \cdot \omega \cdot L \cdot I_0^2 \cdot \sin^2(2 \cdot \omega \cdot t)$$



$$\overline{P} = 0$$

1.4 Kapazitiver Widerstand



1.4.1 Spannung am Kondensator: Maschenregel

$$U(t) = U_c(t) = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \cdot \int I(t) dt$$

$$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$U_c(t) = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$U_c(t) = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I_0 \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

1.4.2 Wechselstromwiderstand

$$X_c = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow X_c \rightarrow \infty$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow X_c \rightarrow 0$$

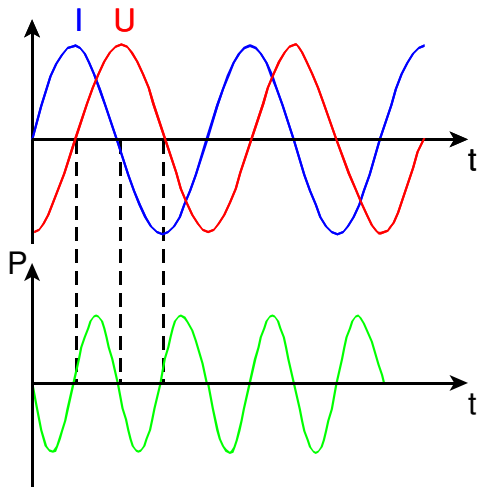
1.4.3 Phasenverschiebung

Bei Kapazitäten (Kondensator) läuft der Strom der Spannung um $\pi/2$ voraus.

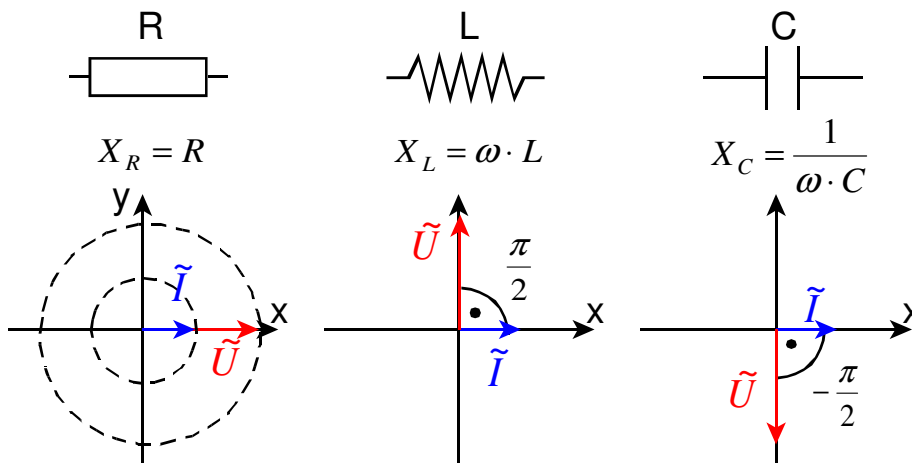
1.4.4 Leistung

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = -\frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I_0^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

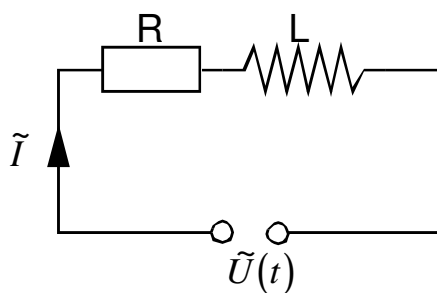
$$P(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{I_0^2}{\omega \cdot C} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t)$$



1.5 Zusammenfassung



1.5.1 Kombination der Schaltungen



Wie groß ist der Phasenwinkel φ und der effektive Gesamtwiderstand?

Strom: $I = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$
 Spannung: $U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$
 → U_0 und φ unbekannt

Lösung: Maschenregel

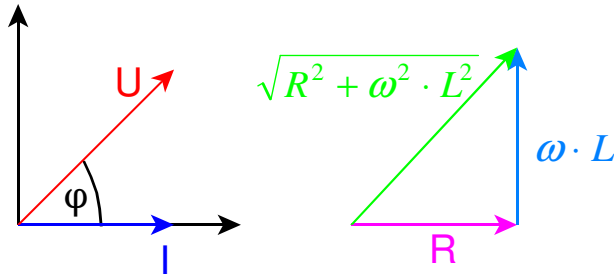
$$U(t) = U_L(t) + U_R(t)$$

Ergebnisse

$$\tan \varphi = \omega \cdot \frac{L}{R}$$

→ L und R sind experimentellbestimmbar mit Messgeräten und ω wird eingestellt

$$\frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}$$



1.6 Komplexe Schreibweise

- großer Vorteil bei komplizierten Schaltungen!!!

1.6.1 Es werden benötigt

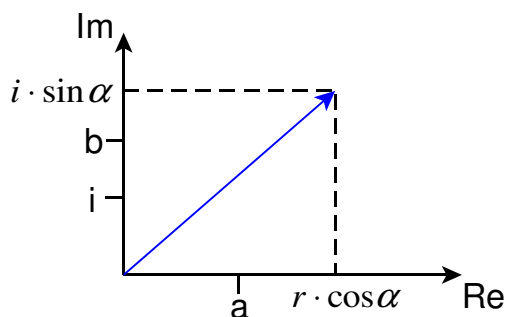
- imaginäre Einheit i ($i^2 = -1$)

- komplexe Zahl (mathematisch):

$$\rightarrow \tilde{z} = a + i \cdot b = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha) = r \cdot e^{i \cdot \alpha}$$

→ $a, b, r, \alpha \in \mathbb{R}$

- Darstellung in Gauss'scher Zahlenebene:



$$\tilde{I} = I_0 \cdot (\cos(\omega \cdot t) + i \cdot \sin(\omega \cdot t)) = I_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

1.6.2 Spannungen an Wechselstromwiderständen

$$\tilde{U}_R = R \cdot \tilde{I} = R \cdot I_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = Z_R \cdot \tilde{I}$$

$$\tilde{U}_L = L \cdot \frac{dI}{dt} = i \cdot \omega \cdot L \cdot I_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = Z_L \cdot \tilde{I}$$

$$\tilde{U}_c = \frac{1}{C} \int I dt = \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C} \cdot I_0 \cdot e^{i\omega t} = Z_c \cdot \tilde{I}$$

| | | |
|------------------------|------------|--|
| Ohm'scher Widerstand | $Z \sim R$ | $Z_R = R$ |
| Induktiver Widerstand | $Z \sim L$ | $Z_L = i \cdot X_L = i \cdot \omega \cdot L$ |
| Kapazitiver Widerstand | $Z \sim C$ | $Z_C = i \cdot X_C = \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C}$ |

1.6.3 Allgemein: Impedanz

$$Z = R + i \cdot X$$

Allgemein komplexer Widerstand

$$\tilde{Z} = R + i \cdot X \quad \text{mit } [\tilde{Z}] = 1\Omega$$

→ Impedanz

- komplexer Scheinwiderstand
- Betrag der Impedanz: $|\tilde{Z}| = Z$
- Wirkwiderstand R (Energieverbrauch, Erwärmung)
- Blindwiderstand: $X = Z_L, Z_C$

Vorteil der komplexen Schreibweise

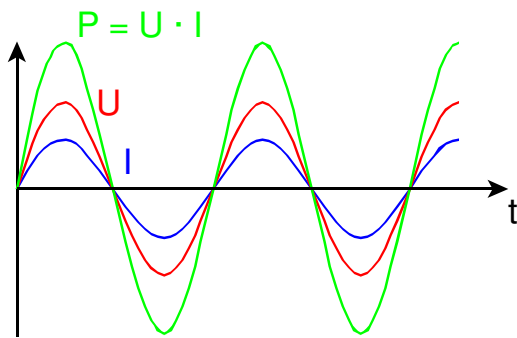
Berechnungen in komplizierten Stromkreisen werden sehr einfach: analog zu Gleichstromschaltungen.

Regeln

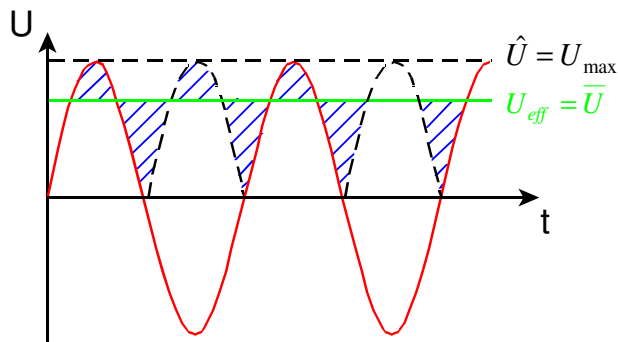
- Knotenregel: $\sum \tilde{I}_k = 0$
- Maschenregel: $\sum \tilde{U}_l = \sum (\tilde{I}_k \cdot \tilde{Z}_k)$
- Serienschaltung von Widerständen: $\tilde{Z}_{ges} = \sum \tilde{Z}_i$
- Parallelschaltung von Widerständen: $\frac{1}{\tilde{Z}_{ges}} = \sum \left(\frac{1}{\tilde{Z}_i} \right)$

1.7 Effektivwerte

Was bedeutet 220 V Ausgangsspannung an der Steckdose?



Mittelwert der Spannung:



220 V Ausgangsspannung an der Steckdose sind also die effektive Spannung. Die Maximalspannung \hat{U} beträgt 312 V.

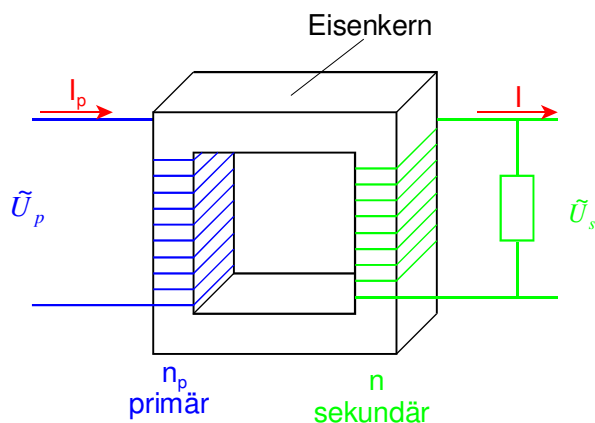
$$U_{eff} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

$$I_{eff} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$$

1.7.1 Wirkleistung

$$P_{wirk} = \frac{1}{2} \cdot \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \cos \varphi = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos \varphi$$

1.8 Transformator



Induktionsspannung auf der Sekundärseite (im Leerlauf oder bei kleiner

Stromentnahme): $\left| \frac{\tilde{U}_p}{\tilde{U}_s} \right| = \frac{n_p}{n_s}$

Induktionsstrom (bei Kurzschluss oder starker Stromentnahme): $\frac{\tilde{I}_p}{\tilde{I}_s} = \frac{n_s}{n_p}$

Die Ströme sind beliebig veränderbar.

1.8.1 Anwendung

Um Verluste beim Stromtransport über Hochspannungsleitungen möglichst gering zu halten, wird der Strom im Kraftwerk hochtransformiert auf z.B. typische 380.000 V. Damit können kleine Ströme fließen und die Verluste sind gering. Am Ende der Hochspannungsleitung wird der Strom wieder heruntertransformiert auf ungefährlichere Spannungen.

II. Optik

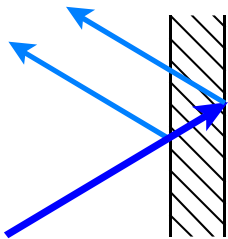
1. Interferenz

1.1 Allgemein

Vorraussetzung:

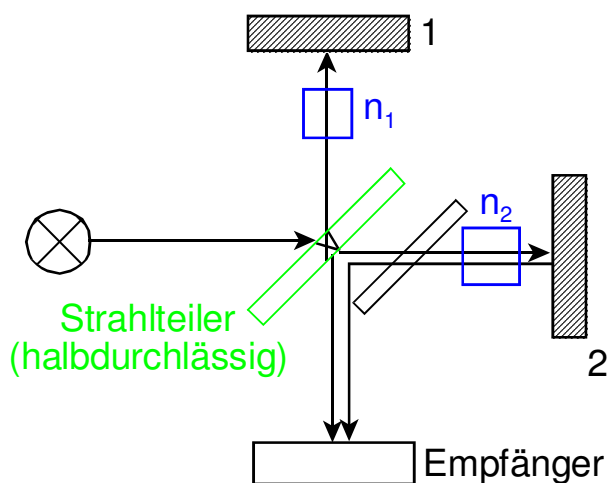
- monochromatisches Licht
- kohärentes Licht
- Laser

Aufspaltung des Lichtstrahls:



- konstruktiv: $\Delta = m \cdot \lambda$
- destruktiv: $\Delta = (2 \cdot m + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$

1.2 Michelson-Interferometer (1880)



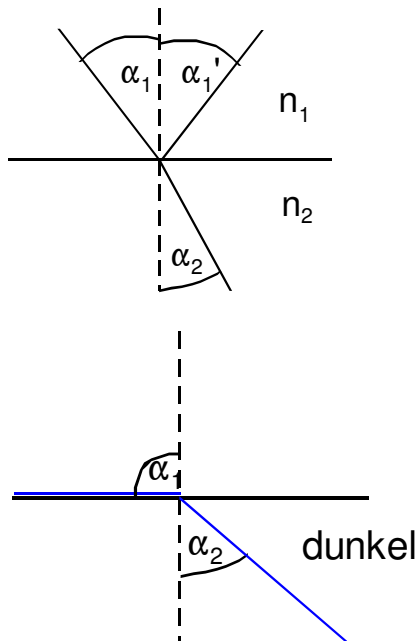
- Nobelpreis 1907

Anwendungen:

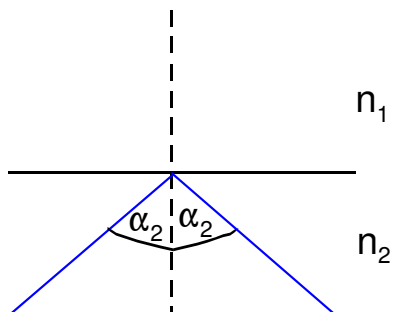
- Längenmessung bis $\frac{1}{100} \lambda \approx 5 \text{ nm}$
- Wellenlängenbestimmung
- Spektrometer, Spektralanalyse

- Brechungsindexmessung (mit einer Genauigkeit von bis zu $\Delta n \approx 10^{-8}$)

1.3 Reflexion und Beugung an Grenzschichten



1.3.1 Totalreflexion

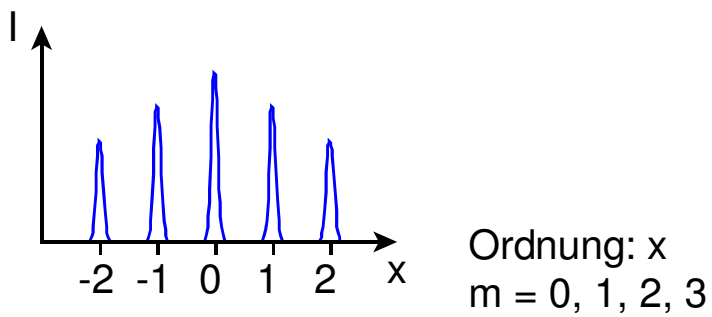
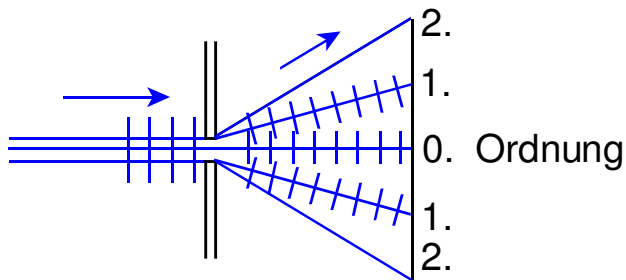


Grenzwinkel für die Totalreflexion:

$$\sin \alpha_T = \frac{n_1}{n_2}$$

1.4 Lichtbeugung an Hindernissen

1.4.1 Beugung am Spalt

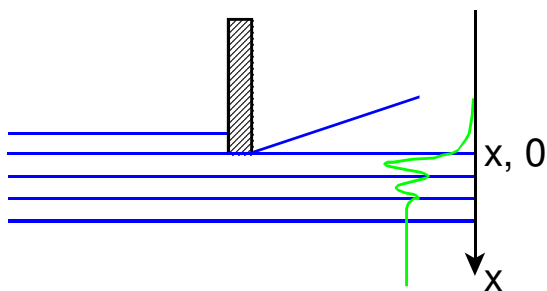


Interferenzbedingung:

$$d = \sin \alpha \approx (2 \cdot m + 1) \frac{\lambda}{2}$$

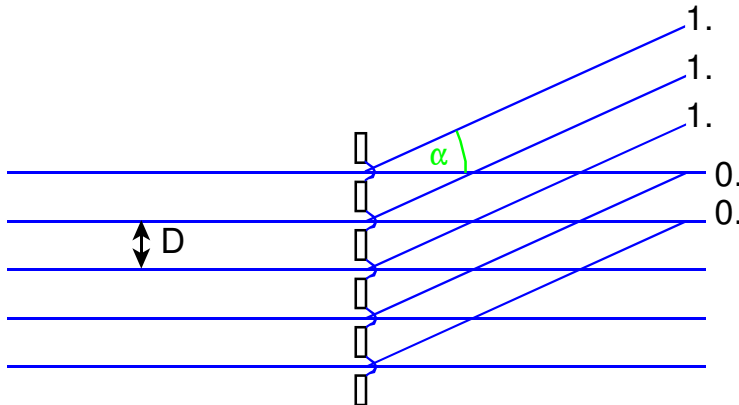
mit d: Spaltbreite; α : Winkel der Ablenkung

1.4.2 Beugung an Kante

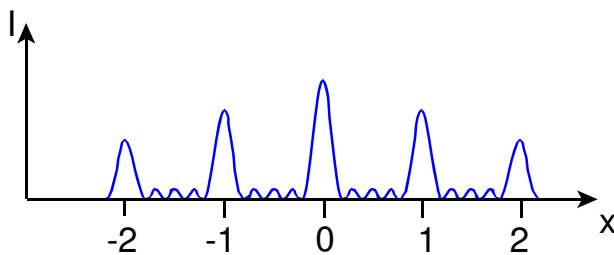


1.4.3 Beugung am Gitter (Fraunhofer 1829)

Monochromatisch (Laser)



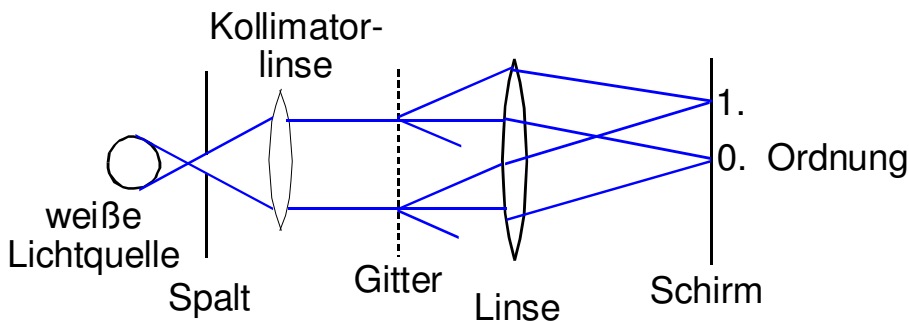
$D - \sin \alpha = m \cdot \lambda$
→ Gitterkonstante: $\frac{\text{Linien}}{\text{mm}}$
Spektrum:



- wachsende Strichzahl:
- Nebenmaximum kleiner
- Hauptmaximum schärfer

Experiment

Aufbau eines einfachen Gitterspektrometers:



Verschiedene Gitter:
 $2 \frac{\text{Linien}}{\text{mm}}$, 4, 10, 50, 690

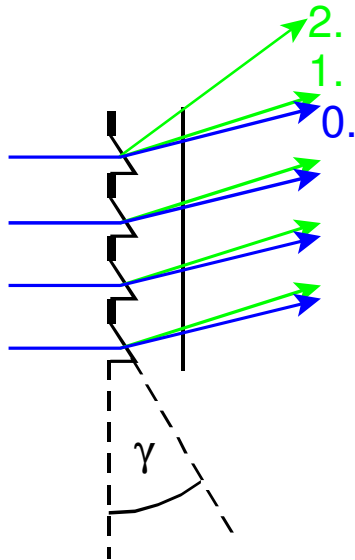
- Anwendung: Spektralanalyse

→ Auflösungsvermögen: $A = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = m \cdot p$ (mit m: Ordnung; p: Strichzahl;

$\delta\lambda$: Abstand benachbarter Linien)

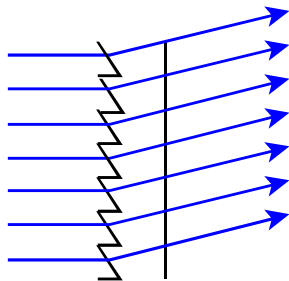
- Problem: Durch die verschiedenen Ordnungen wird sehr viel Licht „verschwenkt“.

→ Lösung: Blaze-Gitter



→ wichtig: Blaze-Winkel γ

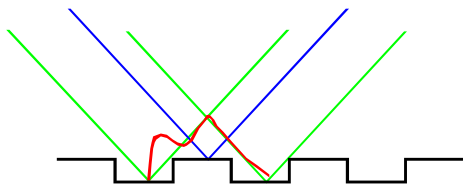
- Echelette-Gitter:



→ Vorteil: fast gesamtes Licht genutzt

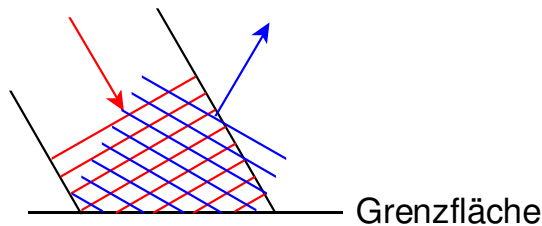
- in der Praxis: Reflektionsgitter

Experiment: CD, DVD



1.5 Reflexion und Brechung

1.5.1 Reflexion

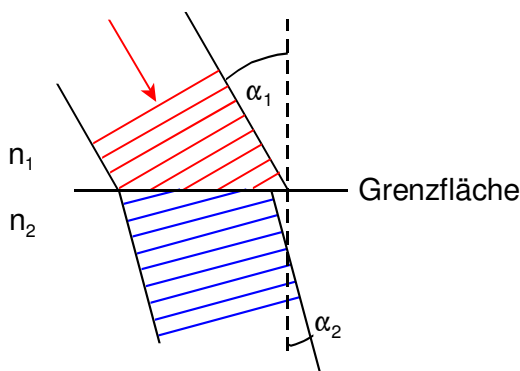


Einfallswinkel = Ausfallswinkel

1.5.2 Brechung

Eindringen in anderes Medium: Sprung in Brechungsindex n

$$c_m = \frac{c_0}{n}$$



Brechungsgesetz (Snellius)

$$n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n_2 \cdot \sin \alpha_2$$

1.5.3 Ergebnis

An Grenzschicht $n_1 \neq n_2$:

- Aufspaltung in:

- reflektierten Strahl
- gebrochenen Strahl

- relative Intensitäten hängen ab vom Winkel α

- Reflexionsvermögen: $r = \frac{I_r}{I_e} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$

- Beispiel Luft-Glas: $r = \left(\frac{-0,5}{2,5} \right)^2 = \frac{0,25}{6,25} = 4\%$

1.6 Interferenz mit Röntgenstrahlen

$$\lambda_x \approx 10^{-3} - 10^{-4} \lambda_{\text{Licht}}$$

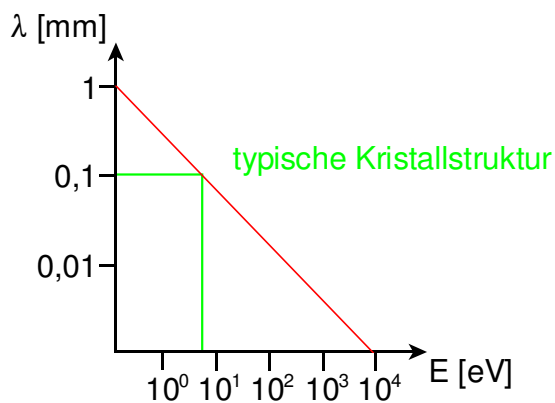
λ_x : Gitterkonstante von Kristallen (Atomabstand ca. 0,1 – 0,2 nm)

1.7 Interferenz mit Teilchen (e^- , Neutronen, ...)

- bei Teilchen:

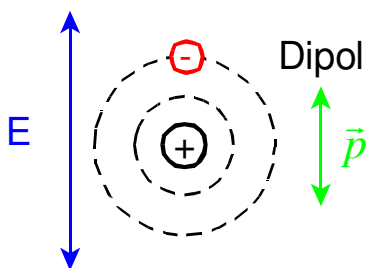
de Broglie: $\lambda = \frac{h}{p}$

mit λ : Wellenlänge des Teilchens; h : Planck'sches Wirkungsquantum; p : Impuls des Teilchens



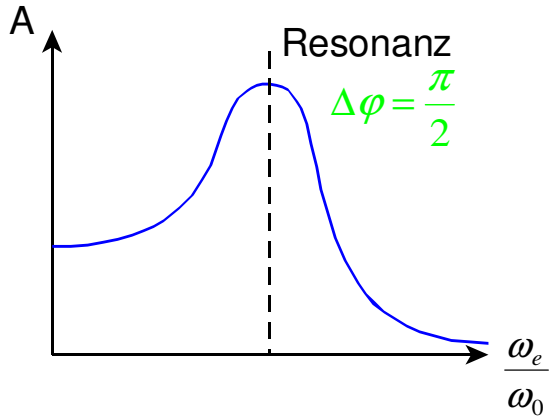
2. Dispersion und Absorption

Atom im elektrischen Feld:

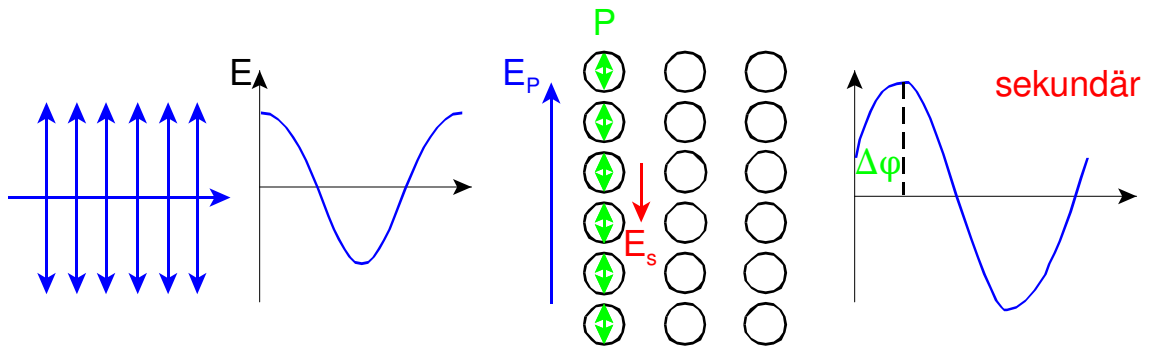


Dipol macht erzwungene Schwingung im elektrischen Feld.

Erinnerung:



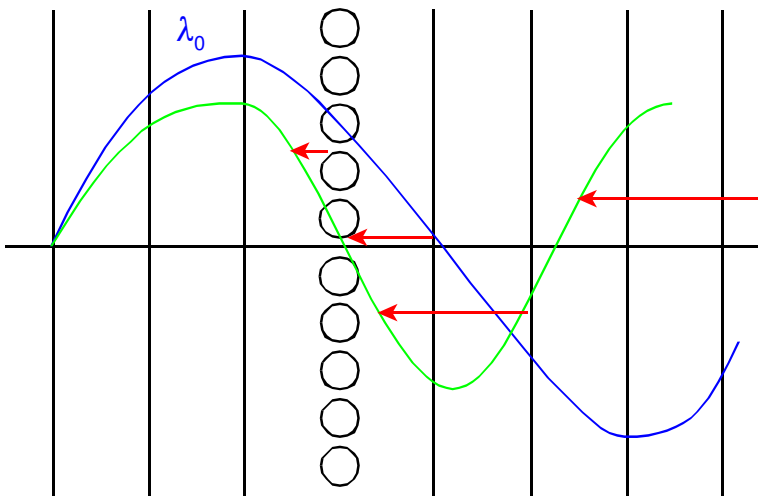
Atomebene im elektrischen Feld:



Ergebnis: resultierende Welle
 Phasenverschiebung $\Delta\gamma$

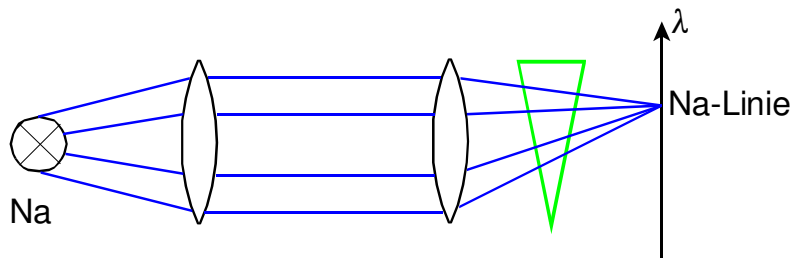
$$n = 1 + \frac{\Delta\gamma}{a \cdot k_0}$$

mit a : Δz ; k_0 : Wellenzahl primär

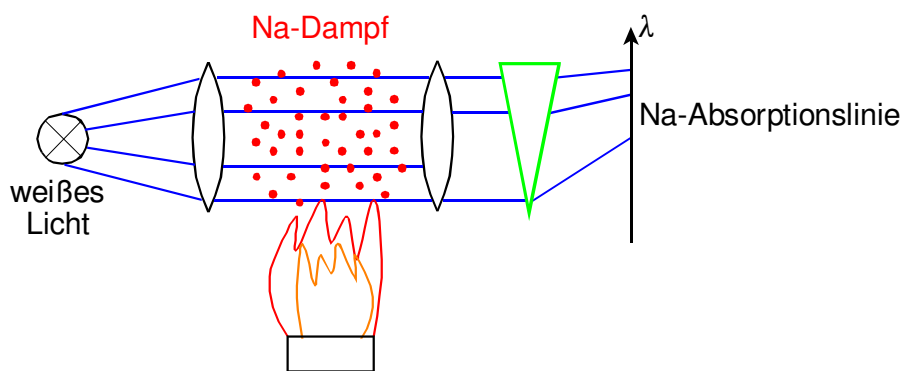


2.1 Experiment: Natrium-Absorption

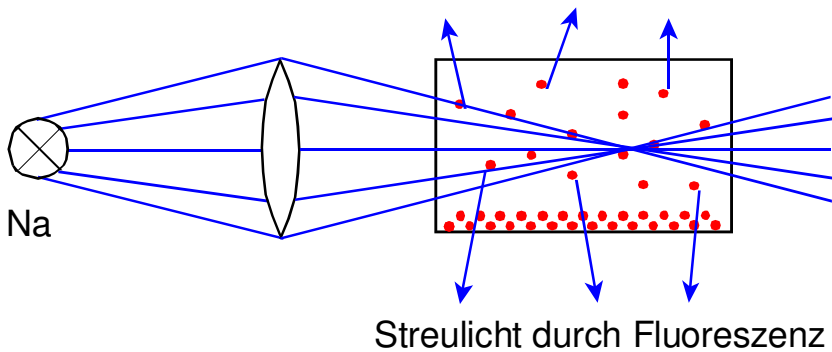
a)



b)



Experiment



3. Strahlenoptik

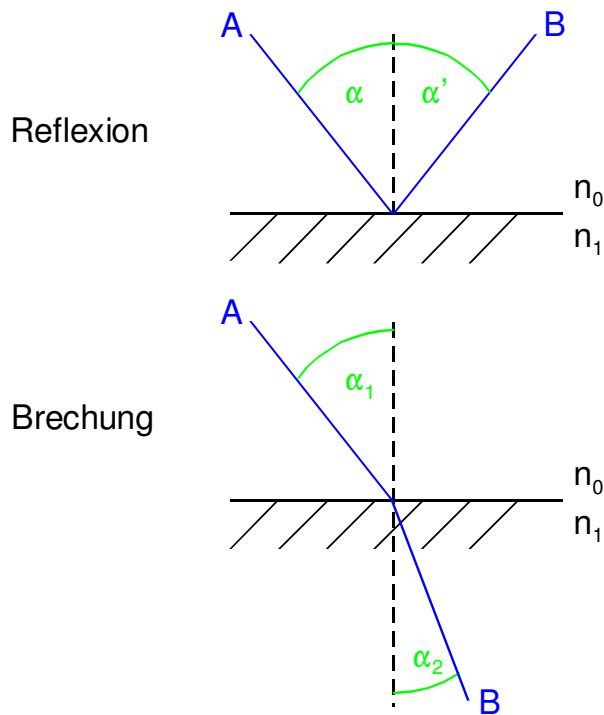
Grundlage für alle optischen Bauelemente.

Fermat'sches Prinzip: Licht wählt stets den „kürzesten“ (schnellsten) Weg von A nach B.

„Kürzester Weg“:

$$\Delta = \sum_i n_i \cdot s_i = \text{minimal}$$

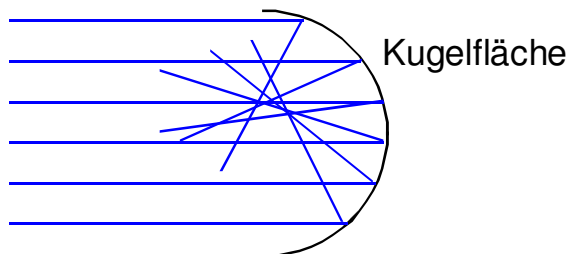
Beispiel:



3.1 Experiment: Optische Bauelemente

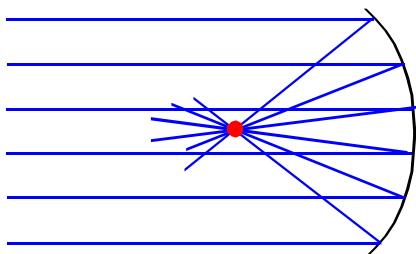
3.1.1 Spiegel, Hohlspiegel

- sphärischer Spiegel:



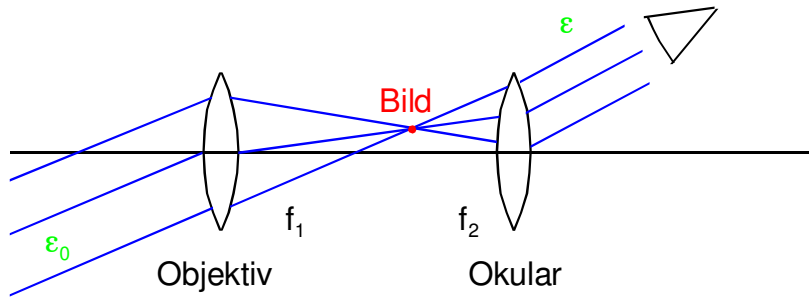
kein sauberer Brennpunkt

- asphärischer, parabolischer Spiegel



sauberer Brennpunkt

Astronomisches Fernrohr:

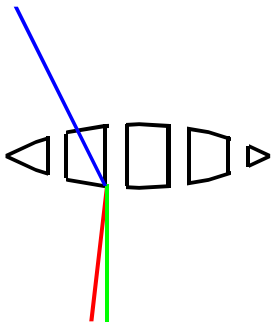


Vergrößerungsfaktor V_F :

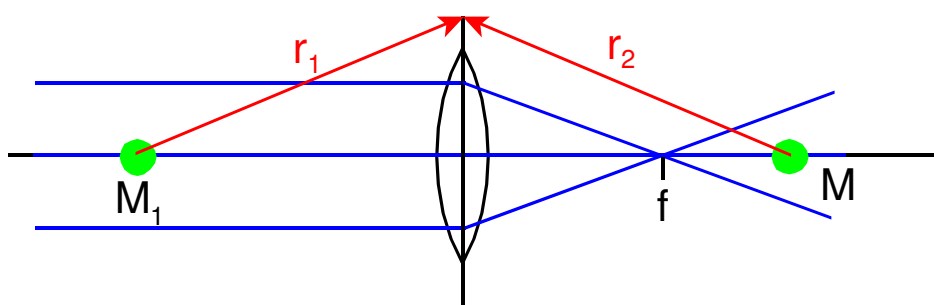
$$V_F = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{f_1}{f_2}$$

3.1.2 Prisma

- Dispersion führt zur Farbaufspaltung → Linsenfehler



3.1.3 Sammellinsen



Linsenmacherformel:

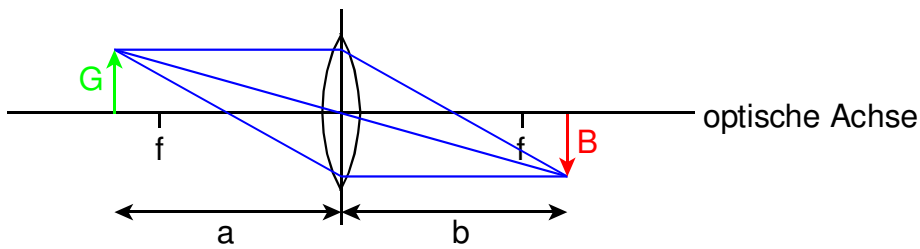
$$\frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

Abbildungsformel:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Abbildungsgesetz:

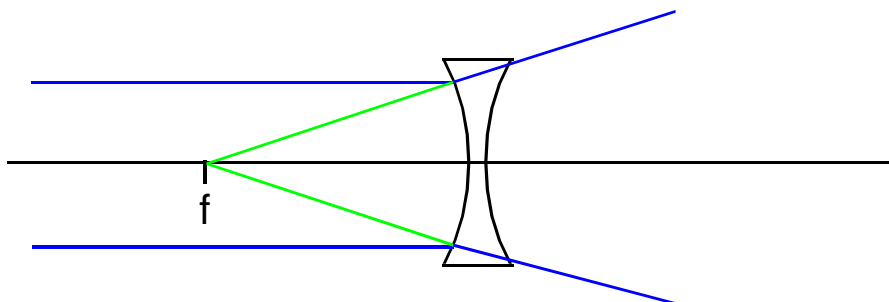
$$\frac{B}{G} = \frac{b}{a}$$



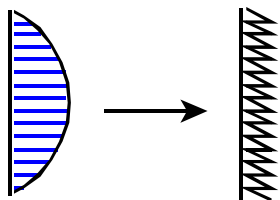
Verschiedene Fälle:

| Verhältnis: | Bild: |
|-------------|--|
| $a > 2f$ | verkleinert, umgekehrt, reell |
| $a = 2f$ | 1 : 1, $G = B$ (Makro) |
| $a < 2f$ | vergrößert, umgekehrt, reell |
| $a = f$ | Bild im Unendlichen |
| $a < f$ | vergrößert, aufrecht, virtuell (z.B. Lupe) |

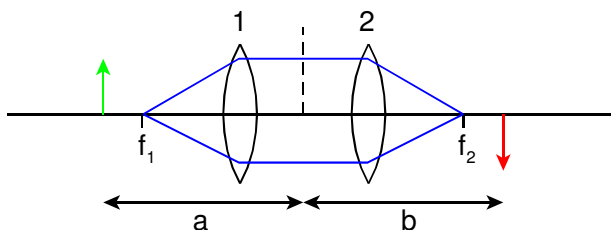
3.1.4 Zerstreuungslinsen



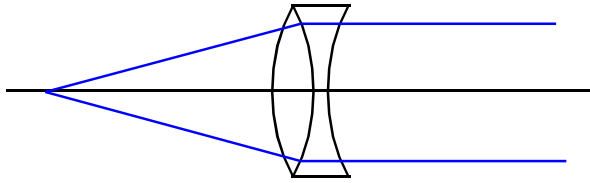
Fresnellinse



Linsenkomensation



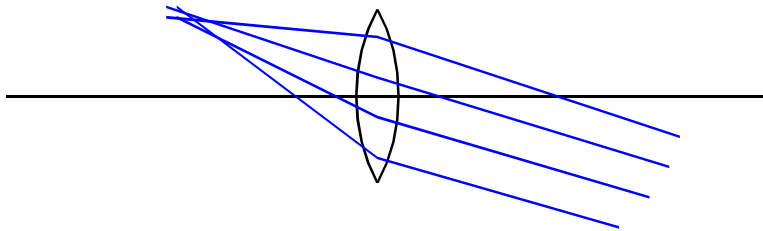
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$



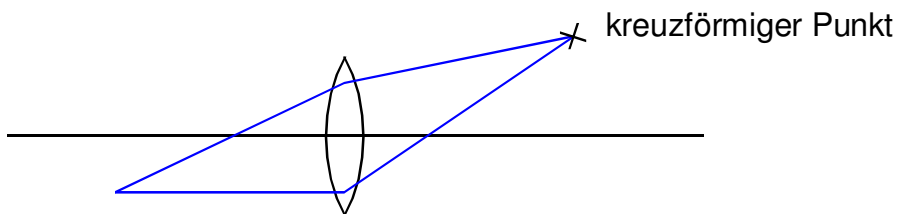
Linsenfehler

- 1.) Sphärische Abberation
→ Abhilfe: asphärische Form (z.B. Parabel)
- 2.) Koma („Haar“)

kein Punkt, verschwommen

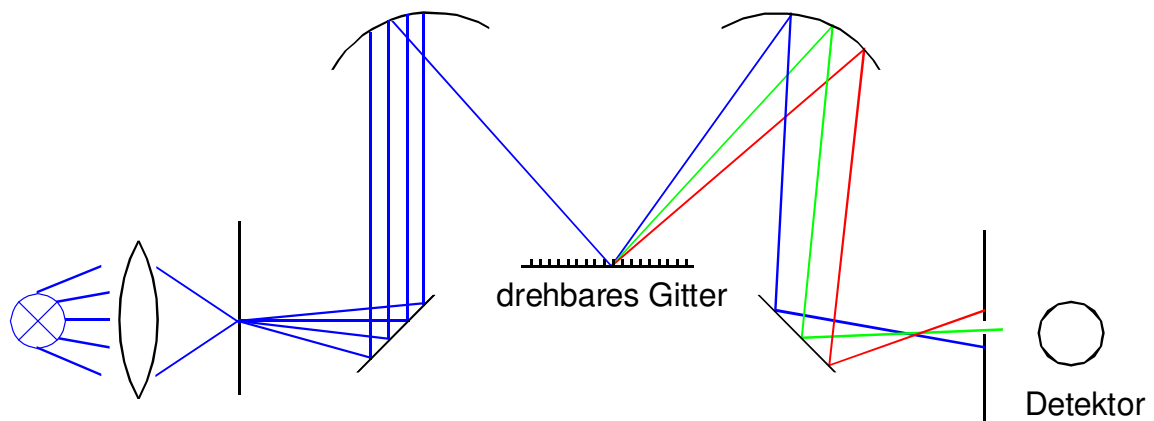


- 3.) Astigmatismus (Punktlosigkeit)



- 4.) Verzeichnung (durch Randstrahlen)
- tonnen- oder kissenförmig
- 5.) Chromatische Abberation
- Dispersion → Farbfehler

3.2 Experiment: Monochromator



3.2.1 Photometer: Größen

Licht („Photo“), vom Auge wahrnehmbar

Strahler (Lichtquelle)

- Lichtstärke:

$$I_l = \frac{d\Phi}{d\Omega} \quad [I_l] = 1Cd = 1 \frac{lm}{sr}$$

→ Cd ist eine SI-Basiseinheit

- Quelle mit $540 \cdot 10^{12}$ Hz gibt in Raumwinkel 1 Steradian (sr) $\frac{1}{683}$ Watt ab

$$- \text{Lichtstrom } \Phi_l = \int I d\Omega \quad [lm] = [Cd] \cdot [sr]$$

4. Experiment: Musik

- Musik lässt sich mit Licht übertragen

III. Schwingungen und Wellen

1. Begriffsdefinitionen

Schwingung: lokale Bewegung

Welle: Schwingung, die sich fortpflanzt

periodische Bewegung: $y(t) = y(t + T)$

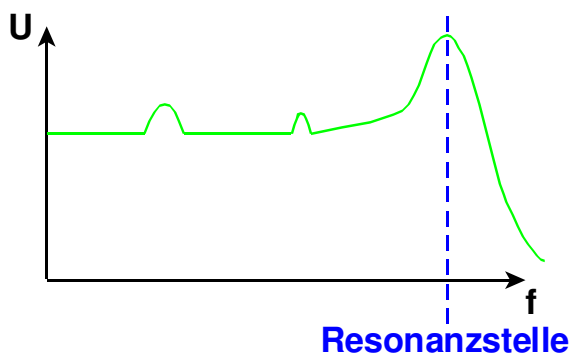
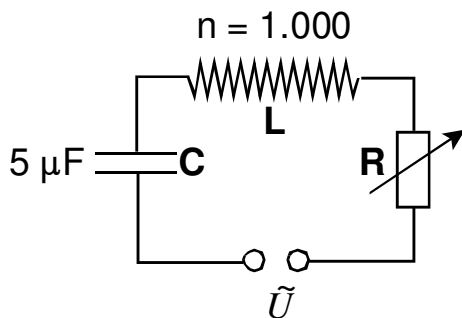
Periodendauer: T

1.1 Voraussetzung für die Schwingung

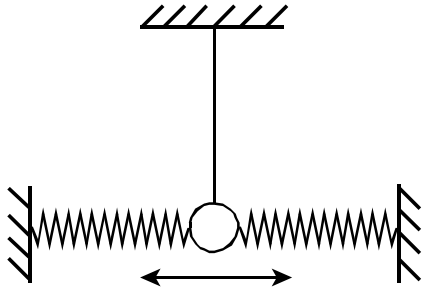
- schwingungsfähiges System
- rücktreibende Kraft zur Gleichgewichtslage

1.2 Experimente

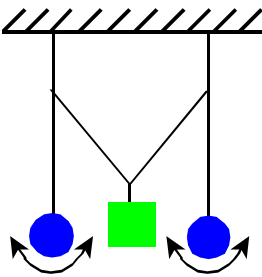
Elektrischer Schwingkreis



Freie Schwingung einer Kugel

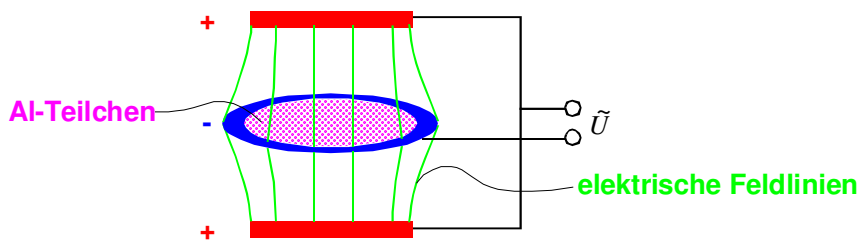


Gekoppelte Pendel



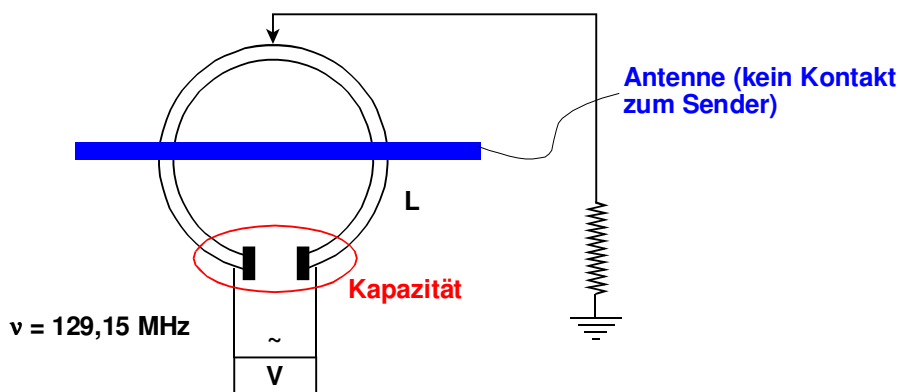
Energie wandert nach Auslenkung eines Pendels zwischen beiden Pendeln periodisch hin und her.

Paul'sche Falle



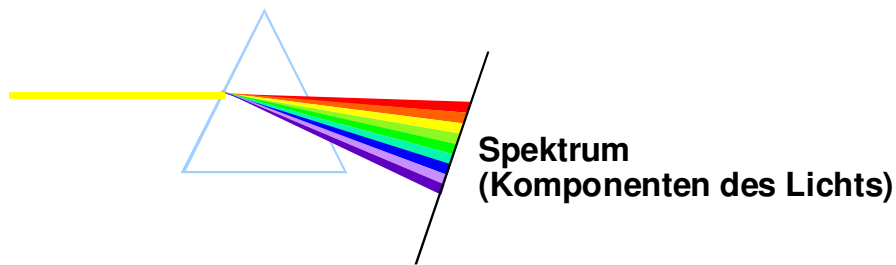
Bei richtig gewählter Wechselfrequenz schwingen die Al-Teilchen frei.

Hertz'scher Dipol



$\nu = 129,15 \text{ MHz}$

Lichtspektrum durch ein Prisma

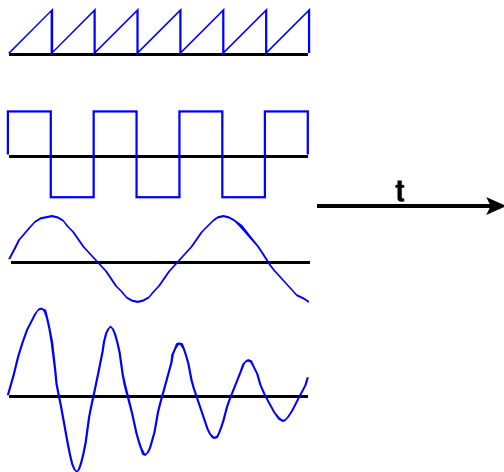


Allen Erscheinungen ist gemeinsam: Die mathematische Beschreibung

2. Mathematische Beschreibung der Schwingung

2.1 Beliebige periodische Vorgänge

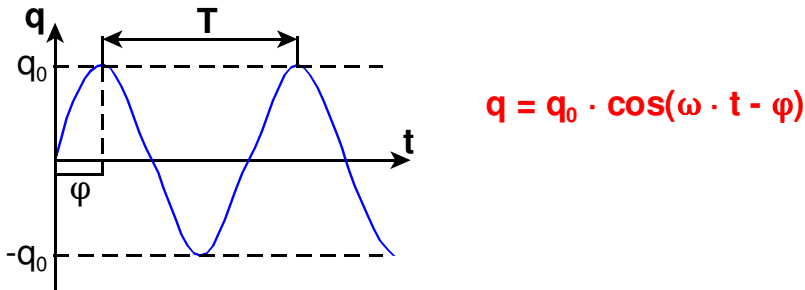
Gilt für beliebige periodische Vorgänge:



Hier: Begrenzung auf harmonische Schwingungen (mit gedämpfter Schwingung), denn: Komplizierte periodische Bewegungen sind darstellbar durch Überlagerung von harmonischen Funktionen (Fourier-Synthese/-Analyse).

2.2 Weg-Zeit-Funktion

2.2.1 Ungedämpfte Schwingung



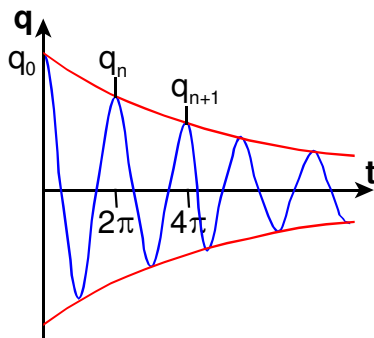
oder komplexe Schreibweise:

$$q(t) = q_0 \cdot e^{i(\omega \cdot t - \varphi)}$$

mit q_0 : Maximalamplitude; ω : Kreisfrequenz ($2\pi \cdot \nu$); φ : Phasenwinkel;
 ν : Frequenz ($1/T$); T : Periodendauer

2.2.2 Dämpfung

Beschränkung auf Verluste \sim Geschwindigkeit v



Exponentielle Abnahme der Amplitude

$$q(t) = q_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

mit δ : Dämpfungs- bzw. Abklingkonstante

oder:
$$q(t) = q_0 \cdot e^{-\frac{1}{\tau} \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

mit τ : Abklingzeitkonstante (Zeit, in der q auf $1/e$ abgefallen ist.)

Amplituden nehmen stets um gleichen Faktor ab: Dämpfungsverhältnis.

$$\gamma = \frac{q_n}{q_{n+1}} = \frac{q_{n+1}}{q_{n+2}} = \text{const.}$$

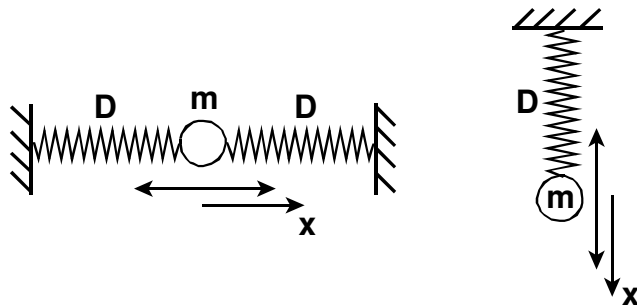
Logarithmisches Dekrement

$$\Delta = \ln \gamma$$

$$\Delta = \ln \gamma = \ln \frac{q_n}{q_{n+1}} = \delta \cdot (t_{n+1} - t) = \delta \cdot T = \frac{T}{\tau}$$

2.2.3 Beispiele für ungedämpfte harmonische Schwingungen

Feder-Masse-System (Federpendel)



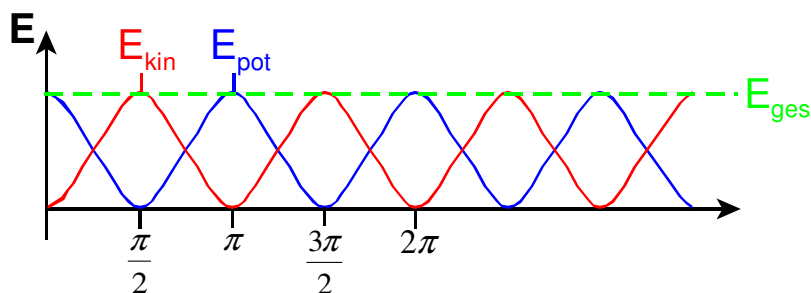
$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

mit $\omega: \sqrt{\frac{D}{m}}$; D: Federkonstante

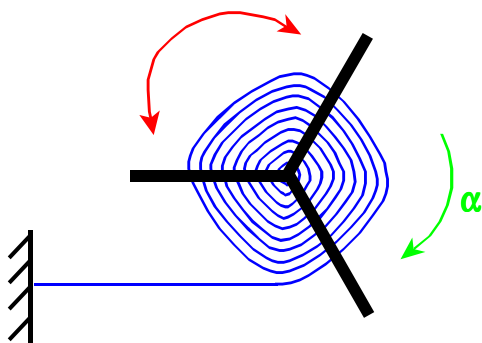
Für ungedämpfte Schwingungen gilt der Energieerhaltungssatz.

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$$

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} D \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 = \frac{1}{2} D \cdot x_0^2 = \text{const.}$$



Torsionspendel



$$\alpha = \alpha_0 \cdot \omega \cdot t$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D^*}{J}}$$

mit D^* : Torsionsfederkonstante; J: Trägheitsmoment

Energieerhaltungssatz:

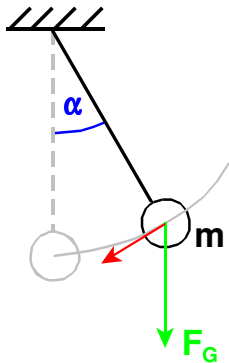
$$E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin,rot}}$$

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} D^* \cdot \alpha^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{\alpha}^2$$

Schwerependel

$$F = m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

Mathematisches Pendel



Näherung für kleine Winkel: $\sin \alpha \approx \alpha$

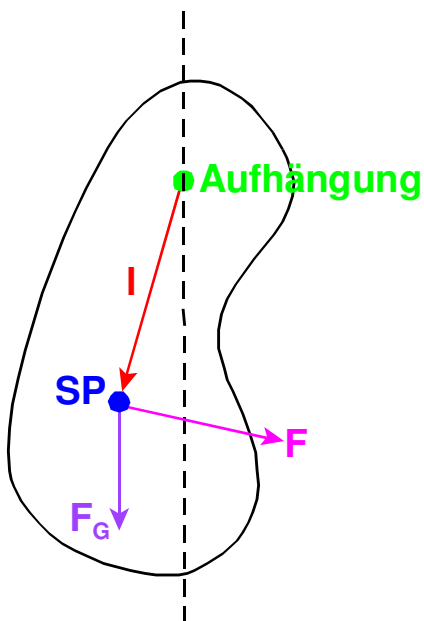
Lösung:

$$\alpha = \alpha_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

→ Die Masse spielt keine Rolle - die Schwingung ist massenunabhängig.

Physikalisches Pendel



Rücktreibendes Drehmoment:

$$M_{\text{rück}} = F \cdot l = m \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha$$

$$m \cdot g \cdot l = D^*$$

$\sin \alpha \approx \alpha$ Lösung:

$$\alpha = \alpha_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

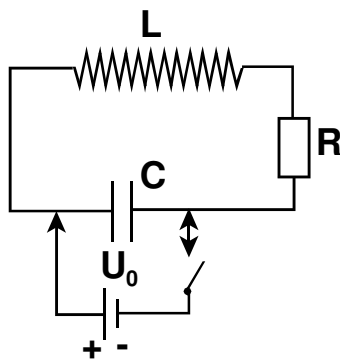
$$\omega = \sqrt{\frac{D^*}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l_r}}$$

mit D^* : Rückstellmoment; J : Trägheitsmoment; l_r : reduzierte Pendellänge

$$l_r = l \cdot (1 + J_S(m \cdot l^2))$$

mit S : Steiner (s. Steiner'scher Term)

Elektrischer Schwingkreis



L C (R) - Kreis

R ist im Idealfall = 0

$$Q(t) = Q_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} \cdot Q^2$$

→ Energie im Kondensator

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \dot{Q}^2$$

→ magnetische Feldenergie

allgemeiner Fall: $R > 0 \rightarrow$ gedämpfte Schwingung

Maschenregel:

$$U_L + U_C + U_R = 0$$

$$L \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + R \cdot I = 0$$

$$\text{mit } I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$$

Bewegungsgleichung für die Ladung Q:

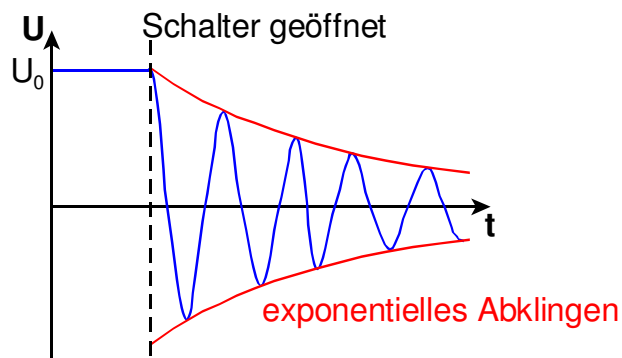
$$L \cdot \ddot{Q} + R \cdot \dot{Q} + \frac{1}{C} \cdot Q = 0$$

→ $R \cdot \dot{Q}$: Dämpfung

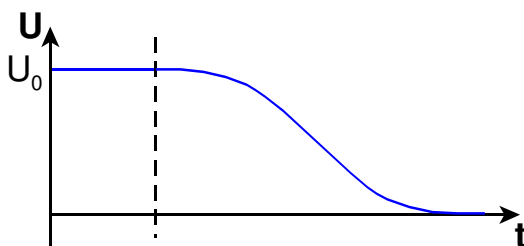
2.3 Arten von Schwingungen

Es ergeben sich folgende 3 Lösungen:

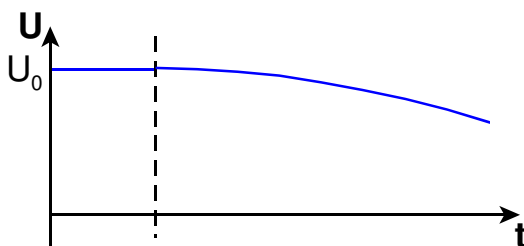
2.3.1 Geringe Dämpfung



2.3.2 Aperiodischer Grenzfall



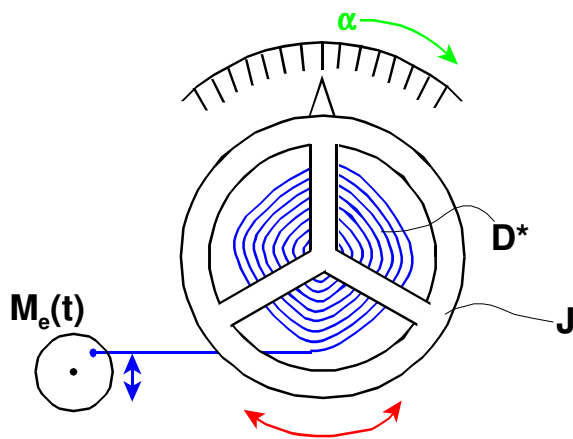
2.3.3 Kriechfall



3. Erzwungene Schwingungen

- bisheriger Fall: freie Schwingung durch impulsförmige Anregung
→ Folge: Schwingung mit Eigenfrequenz ω_0
- erzwungen: periodische(s) Kraft/Drehmoment von außen
→ System bewegt sich mit ω_E (Erregerfrequenz)
- Wie folgt das System der Erregung?

3.1 Pohl'sches Rad (Torsionspendel)



$$M_e = M_0 \cdot \cos(\omega_E \cdot t)$$

oder

$$M_e = M_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

$$M_\alpha = -D \cdot \alpha = M_F + M_R + M_e$$

$$M_F = -D \cdot \alpha$$

$$M_R = -R^* \cdot \dot{\alpha}$$

$$J \cdot \ddot{\alpha} + D \cdot \alpha = M_0 \cdot \cos(\omega_e \cdot t)$$

3.1.1 Lösung

Ansatz:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot e^{i(\omega t - \varphi)}$$

oder

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi)$$

Amplitude:

$$\alpha_0 = \frac{M_0}{J \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \delta^2 \cdot \omega^2}}$$

mit ω_0 : Resonanzfrequenz

Phase:

$$\tan \varphi = 2 \cdot \delta \cdot \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Dämpfung:

$$\delta = \frac{R^*}{2 \cdot J}$$

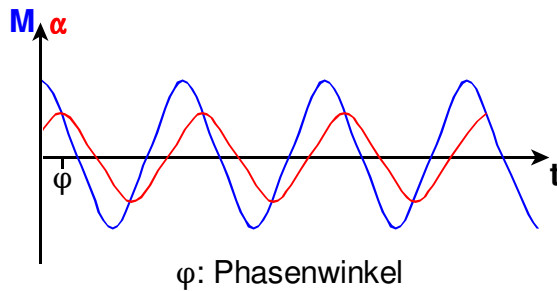
Drehmoment:

$$M(t) = M_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

oder

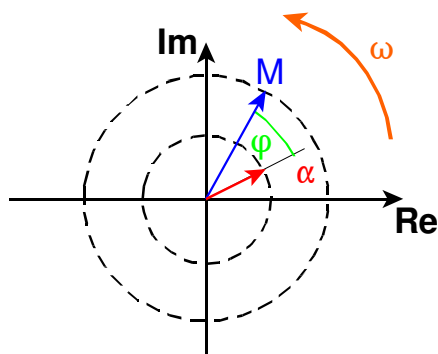
$$M(t) = M_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Diskussion der Lösung



$$M = M_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\alpha = \alpha_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$



Drei Lösungsbereiche

a) $\omega_e = \omega \ll \omega_0$

$$\alpha_0 \rightarrow \frac{M_0}{J \cdot \omega_0^2} = \frac{M_0}{D^*}$$

$$\varphi = 0$$

System folgt instantan

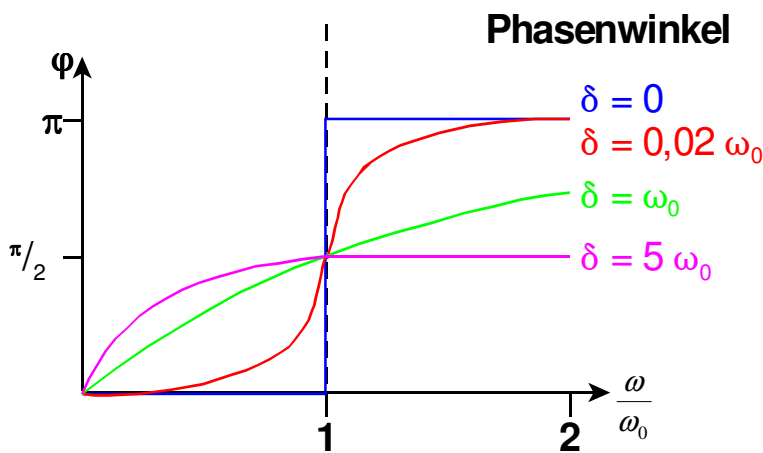
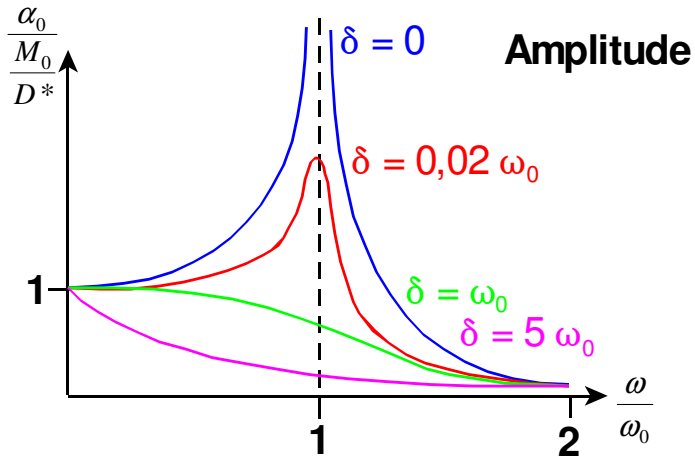
b) $\omega_e = \omega_0$ (Resonanz)

$$\alpha_0 \rightarrow \frac{M_0}{2 \cdot \delta \cdot J \cdot \omega_0} \rightarrow \infty, \text{ wenn } \delta \rightarrow 0$$

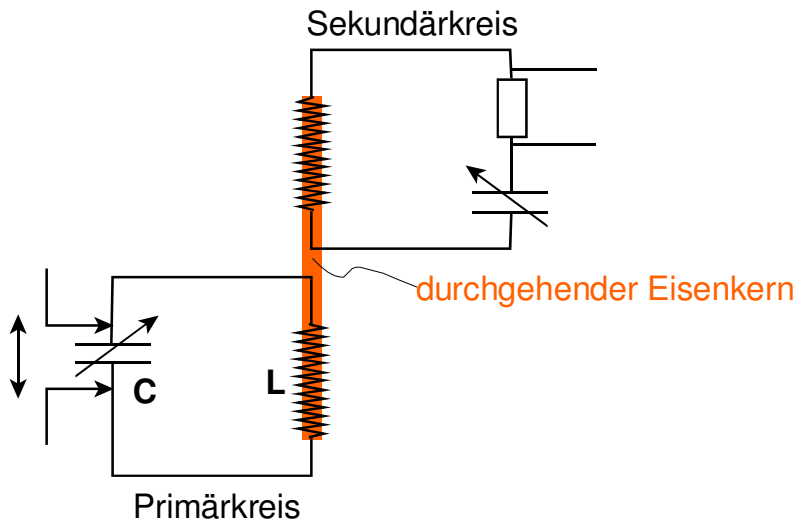
$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

c) $\omega_e \gg \omega_0$

$$\alpha \rightarrow \frac{M_0}{J \cdot \omega^2} \rightarrow 0, \text{ wenn } \omega \rightarrow \infty$$



3.2 Beispiel aus Elektronik (Radio, TV)

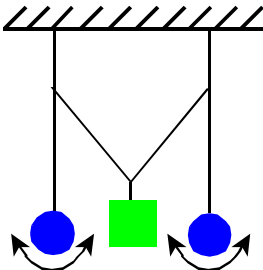


Anwendung: Bandfilter \rightarrow Trennschärfe

4. Gekoppelte Pendel

4.1 Experimente

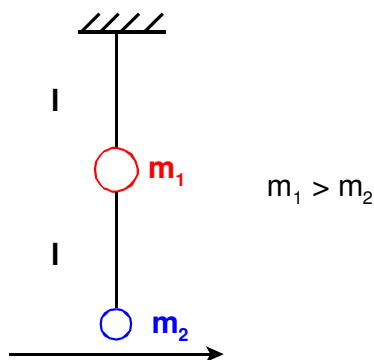
4.1.1 Fadenpendel



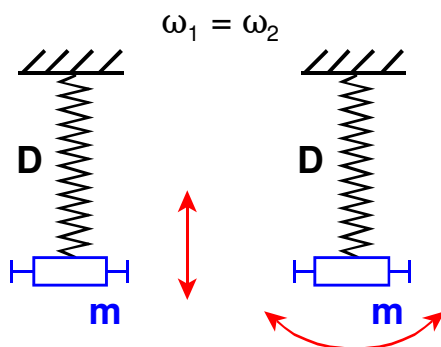
Auslenkung eines Pendels

→ Beobachtung: Energie wandert periodisch zwischen beiden Pendeln hin und her.

4.1.2 Zwei ungleiche Massen, aber gleiche l



4.1.3 Experiment: Wechsel zwischen vertikaler und Drehschwingung



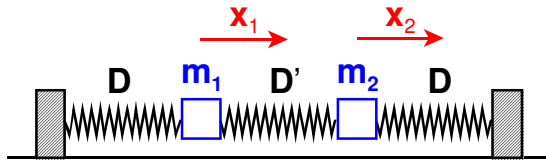
4.2 Bedingung für Energietransfer bei gekoppelten Schwingungen

$$\omega_1 = \omega_2$$

$$\sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{D^*}{J}}$$

4.2.1 Bewegungsgleichungen

→ ungedämpft:



Ruhelage: $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$

$$m \cdot \ddot{x}_1 + D \cdot \hat{x} + D' \cdot (x_1 - x_2) = 0$$

$$m \cdot \ddot{x}_2 + D \cdot x_2 + D' \cdot (x_2 - x_1) = 0$$

gesucht: $x_1(t)$ und $x_2(t)$

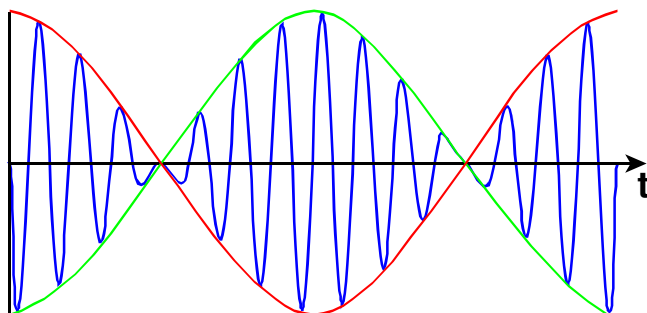
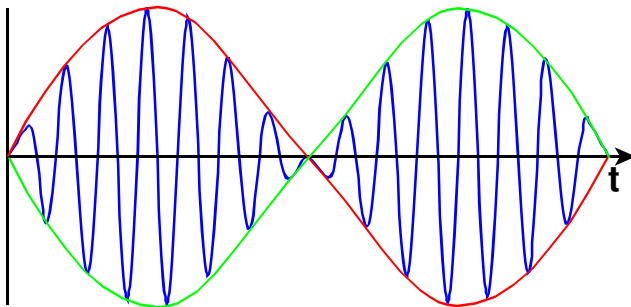
4.2.2 Lösung: Zwei gekoppelte Differentialgleichungen

Ergebnis: Zwei Fundamentalschwingungen

a) Massen schwingen gleichsinnig

b) Massen schwingen gegensinnig mit ω' (Frequenz mit der die Energie hin- und herwandert)

c) nur eine Masse ausgelenkt: Schwebungsfrequenz (Linearkombination der Fundamentalschwingungen)

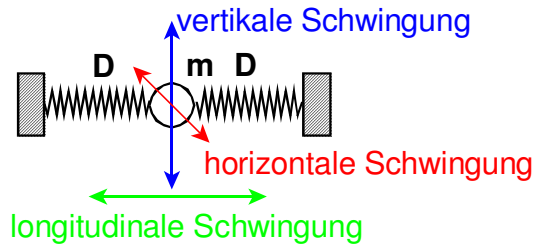


4.3 Schwingende elastische Kontinua

4.3.1 Lineares Kontinuum

Experiment

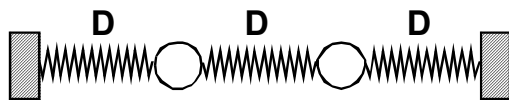
1 Masse:



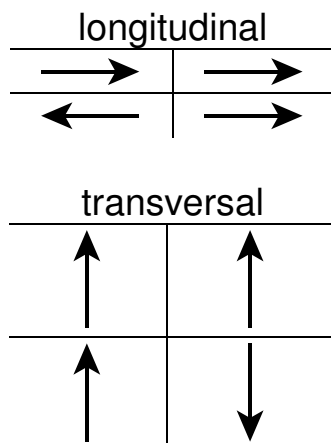
→ 3 Freiheitsgrade der Schwingung

→ vertikale und horizontale Schwingung sind entartet, das heißt sie unterscheiden sich nur in ihrer Richtung

2 Massen:

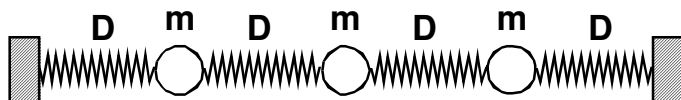


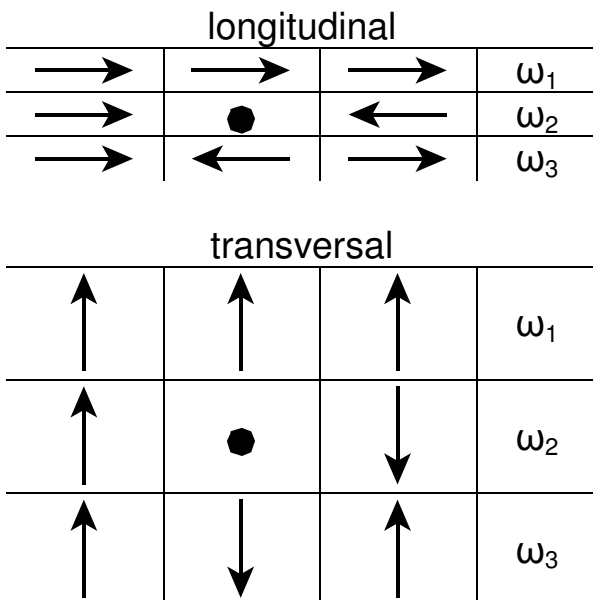
→ 6 Freiheitsgrade



→ jeweils in x- und y-Richtung

3 Massen (Pendelkette):



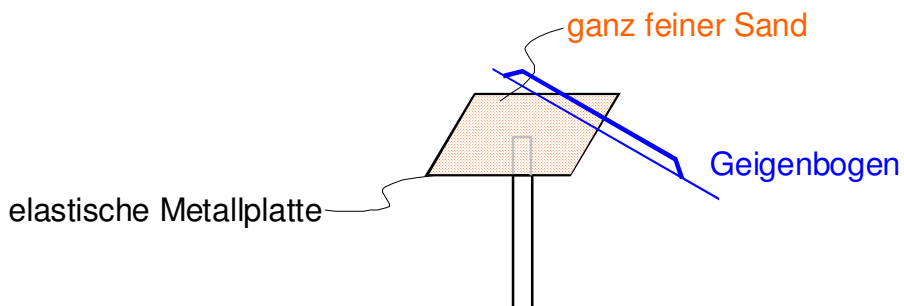


→ 9 Freiheitsgrade

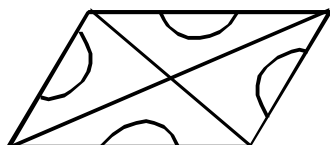
Ergebnis: Zahl der Eigenschwingungen einer Pendelkette = Zahl der Freiheitsgrade.

4.3.2 Ebenes und räumliches Kontinuum

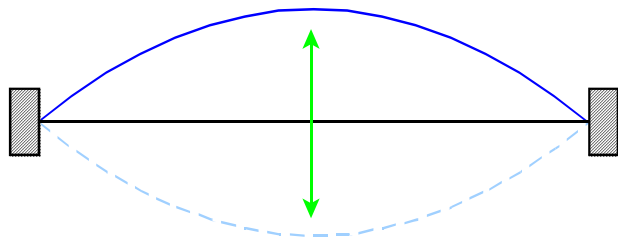
Experiment: Chladnischen Klangfiguren



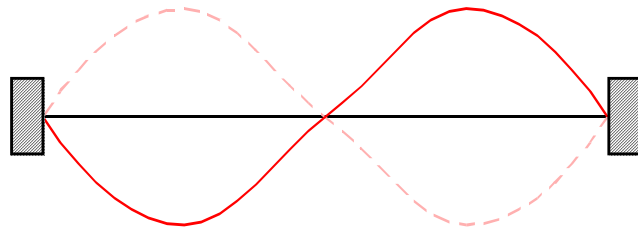
nach Anregung → Ausrichtung der Sandkörner:



4.3.3 Experiment: Gummischlauch



→ Grundschiwingung: Erste Eigenschwiwingung



→ Zweite Eigenschwiwingung

Ergebnis

- theoretisch unendlich viele Eigenschwiwingungen möglich
- Eigenschwiwingungen sind abwechselnd symmetrisch und antisymmetrisch zur Saitenmitte
- Knoten: n-te Eigenschwiwingung hat n + 1 Knoten
- Frequenzen der Eigenschwiwingungen liegen entsprechend der Ordnung höher, Frequenz:

$$v_n = \frac{n}{2 \cdot l} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

mit n: Ordnung; l: Saitenlänge; σ : Saitenspannung $\frac{F}{A}$; ρ : Dichte

1. Ordnung: Grundschiwingung

$$v_1 = \frac{1}{2 \cdot l} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

2. Ordnung:

$$v_2 = \frac{1}{l} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = 2 \cdot v_1$$

→ Verdopplung der Frequenz \triangleq einer Oktave

3. Ordnung:

$$v_3 = 3 \cdot v_1$$

n. Ordnung:

$$v_n = n \cdot v_1$$

Alle Oberschwingungen sind Vielfache der Grundschwingung.

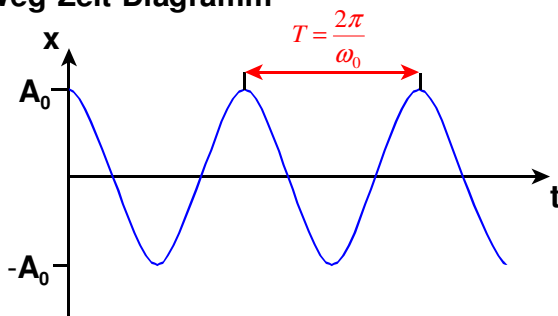
5. Harmonische Analyse (Fourier)

Nach Fourier lassen sich beliebige periodische Funktionen als Überlagerung von harmonischen sin- und cos-Funktionen darstellen.

5.1 Grundsätzliche Darstellung

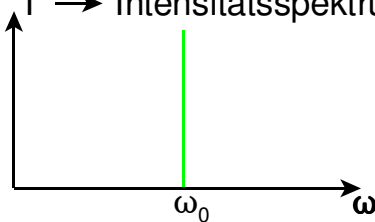
5.1.1 Eine Schwingung

Weg-Zeit-Diagramm

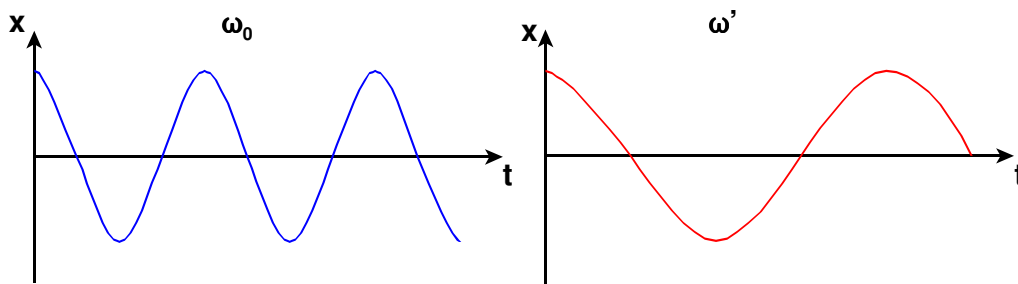


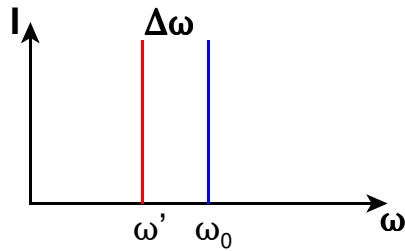
$x \rightarrow$ Amplitudenspektrum

$I \rightarrow$ Intensitätsspektrum $I \sim x^2$

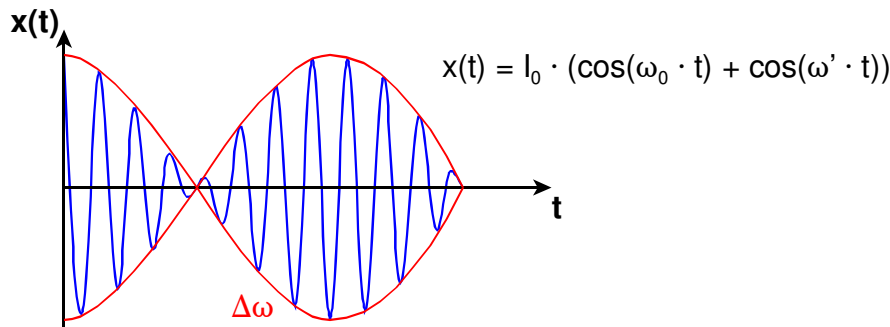


5.1.2 Zwei Schwingungen



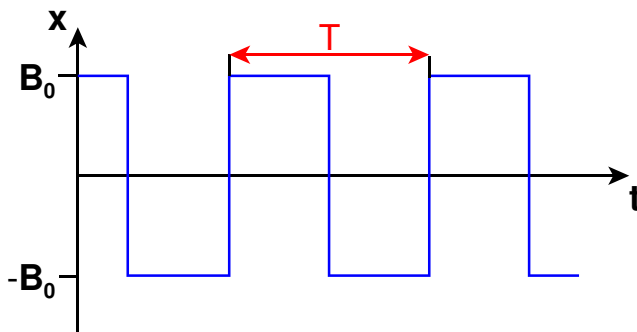


Addition beider Schwingungen:



→ Schwebung bei eng benachbarten Frequenzen

5.1.3 Experiment: Rechteckfunktion



$$x(t) = B_0 \text{ für } 0 < t \leq \frac{T}{2}$$

$$x(t) = -B_0 \text{ für } \frac{T}{2} < t \leq T$$

Ergebnis

Die Rechteckfunktion lässt sich in eine Reihe von Sinusfunktionen zerlegen:

$$x(t) = 4 \cdot \frac{B_0}{\pi} \cdot \left(\sin(\omega_0 \cdot t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3 \cdot \omega_0 \cdot t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5 \cdot \omega_0 \cdot t) + \dots \right)$$

5.1.4 Allgemeine Schreibweise

allgemein: jede Funktion lässt sich in eine Fourier-Reihe zerlegen.

$$f(t) = \sum_n A_n \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + B_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)$$

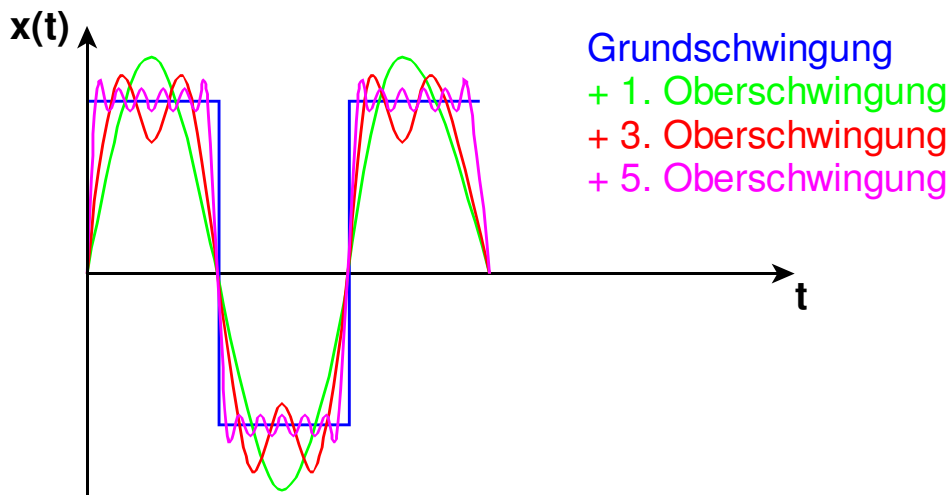
2 Fälle

- Funktion achsensymmetrisch zur Ordinate
→ nur cos-Terme
- Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung
→ nur sin-Terme

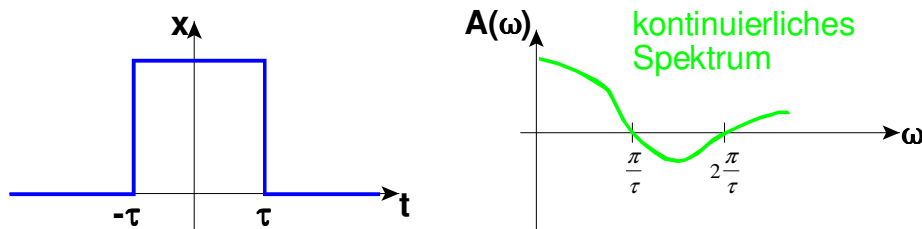
Koeffizienten

$$A_n = \frac{2}{T} \cdot \int f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \cdot \int f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt$$



5.2 Erweiterung: Fourier-Integral

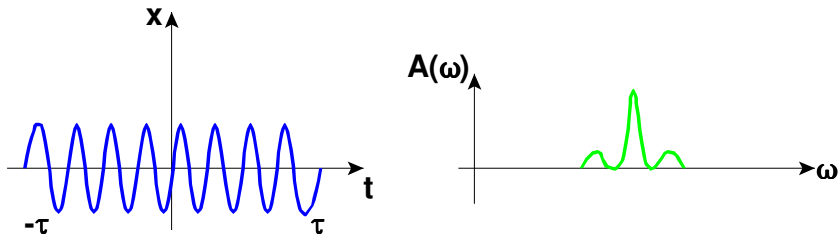


Je schmaler der Puls (Signal), desto breiter das Frequenzspektrum:

$$\Delta \omega \cdot \Delta t = 2\pi$$

mit $\Delta \omega$: Frequenzbreite; Δt : Pulsbreite

Linienverbreiterung der Spektrallinien durch endliche Schwingungsdauern.

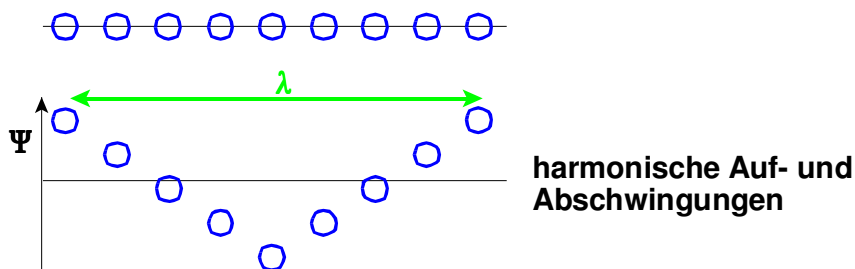


6. Wellen

6.1 Was ist eine Welle?

Zeitliche und räumliche Kopplung von Oszillatoren
→ räumliche Fortschreitung einer Veränderung

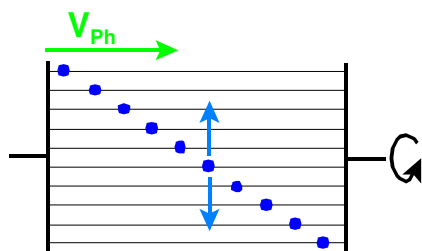
6.1.1 Experiment



6.1.2 Transversale Schwingung



6.1.3 Longitudinale Schwingung



6.1.4 Begriffe

Punkte gleicher Phase
Wellenfront

Räumliche Bewegung der Phase

Wellengeschwindigkeit, Phasengeschwindigkeit v_{Ph}

Abstand zweier gleicher Phasen

Wellenlänge λ

Zeitliche Änderung der Phase

Periodendauer T

Bewegungen pro Zeiteinheit

Frequenz $\nu = \frac{1}{T}$ oder Kreisfrequenz $\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu$

Zahl der Wellenzüge pro Länge

Wellenzahl $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ oder Kreiswellenzahl $k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$

Phasengeschwindigkeit

$$v_{Ph} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \lambda \cdot \nu$$

6.2 Wellenfunktion

$$\Psi(t, z) = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot z)$$

oder

$$\Psi(t, z) = A \cdot e^{i(\omega t - k \cdot z)}$$

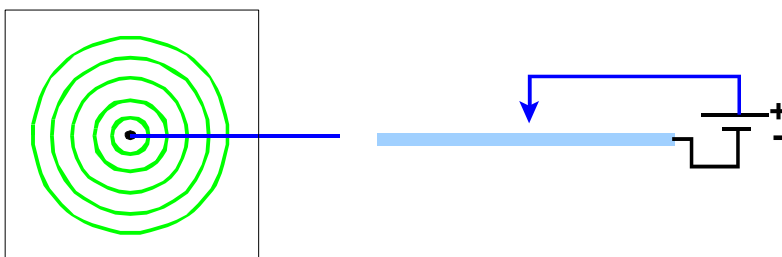
6.2.1 Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial t^2} = v_{Ph}^2 \cdot \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial z^2}$$

→ sehr viele Lösungen, je nach Randbedingungen

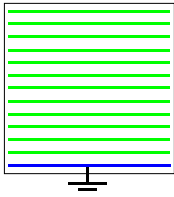
6.3 Spezielle Wellenformen

6.3.1 Experiment: Punktförmige Quelle/Erregung



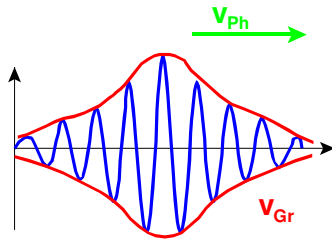
→ kreisförmige Welle

6.3.2 Experiment: Lineare Quelle



→ ebene Welle

→ Phasengeschwindigkeit, Gruppengeschwindigkeit



6.4 Weitere Eigenschaften von Wellen

6.4.1 Polarisation (nur bei Transversalwellen)

Horizontal



Vertikal



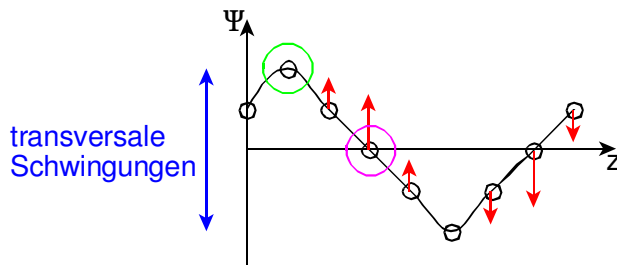
Zirkular



Elliptisch



6.4.2 Intensität einer Welle



Am **Umkehrpunkt** nur E_{pot} :

$$\Delta E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot \omega^2 \cdot s_0^2$$

Beim Nulldurchgang nur E_{kin} :

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot \omega^2 \cdot s_0^2$$

Es wird stets Energie an weitergegeben:

$$\text{Energiestrom: } \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = \rho_E$$

$$\frac{A \cdot \Delta z}{\Delta t} = \rho_E \cdot A \cdot v_{\text{Ph}}$$

Energie pro Zeit durch Fläche

→ Energiestromdichte j_E

$$I = |\vec{j}_E| = \frac{1}{A} \cdot \frac{dE}{dt}$$

$$\vec{j}_E = \rho_E \cdot \vec{v}_{\text{Ph}}$$

$$\text{da } \Delta E \sim s_0^2 \rightarrow \rho_E \sim s_0^2$$

$$I \sim s_0^2 \text{ oder } I \sim \Psi_0^2$$

Ausdehnung

a) ebene Welle (ohne Dämpfung)

→ I unabhängig von z

b) Kreis- oder kugelförmige Abstrahlung

$$F_{\text{Kugel}} = 4\pi r^2$$

$$F_{\text{Kreis}} = \pi r^2$$

$$I = |j_E| \sim \frac{1}{r^2}$$

Amplitude fällt also mit $1/r$

Wellenfunktion einer harmonischen Kugelwelle:

$$\Psi = \frac{\Psi_0}{r} \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot \pi)$$

6.5 Superposition von Wellen

6.5.1 Nur 2 Wellen mit ω_1 und ω_2

Gleiche Richtung, $\omega_1 = \omega_2$

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

harmonische Welle mit φ :

$$\Psi = A \cos(\omega t - k z) + B \cos(\omega t - k z - \varphi)$$

Bei $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi = 0$:

$$\Psi = \Psi_{1,0} + \Psi_{2,0} \text{ (Addition der Amplituden)}$$

Gleiche Richtung $\omega_1 \neq \omega_2$

$$\Psi = A \cos(\omega_1 t - k_1 z) + B \cos(\omega_2 t - k_2 z)$$

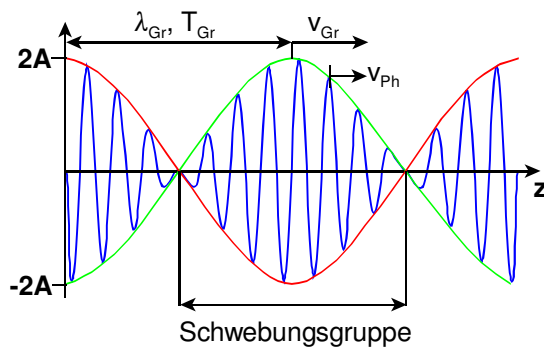
→ Schwebung

- mittlere Kreisfrequenz $\bar{\omega} = \frac{1}{2} \cdot (\omega_1 + \omega_2)$
- mittlere Wellenzahl $\bar{k} = \frac{1}{2} \cdot (k_1 + k_2)$
- Differenzfrequenz $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$
- Wellenzahldifferenz $\Delta k = k_1 - k_2$

$$\Psi = 2 \cdot A \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right) \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t - \bar{k} \cdot z)$$

→ langsam veränderliche Amplitude → ebene Welle

6.5.2 Gruppeneigenschaften

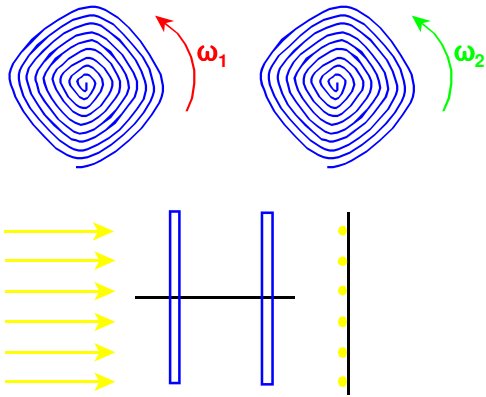


$$T_{Gr} = \frac{2 \cdot \pi}{\Delta\omega} \quad \lambda_{Gr} = \frac{2 \cdot \pi}{\Delta k}$$

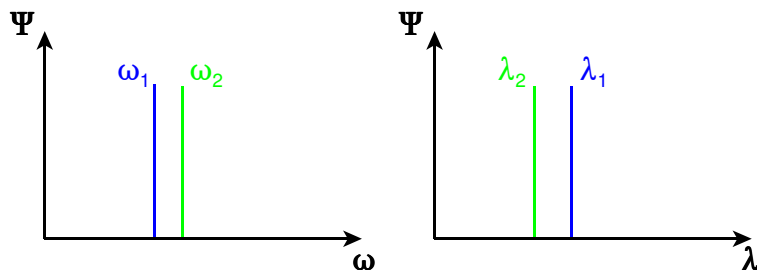
Gruppengeschwindigkeit:

$$v_{Gr} = \frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

6.5.3 Experiment: Zwei Spiralen



Überlagerung von zwei benachbarten Wellen (kleiner Frequenzunterschied) → einfacher Fall



Erinnerung:

$$v_{Ph} = \lambda \cdot \nu = \lambda \cdot \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{\omega}{k}$$

a) $v_{Ph1} = v_{Ph2} = v_{Ph} \rightarrow v_{v_{Ph}} = v_{Gr}$

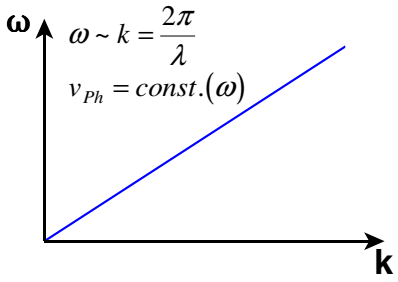
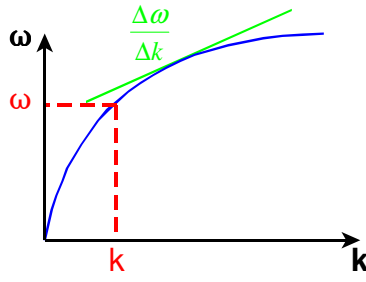
b) bei unverändertem $\lambda_1, \lambda_2, \omega_2$, aber verändertem ω_1

$$v_{Ph} \neq v_{Gr}$$

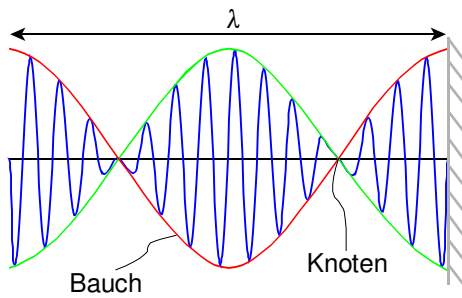
→ **Dispersion**

6.5.4 Dispersion

Dispersionsfunktionen:

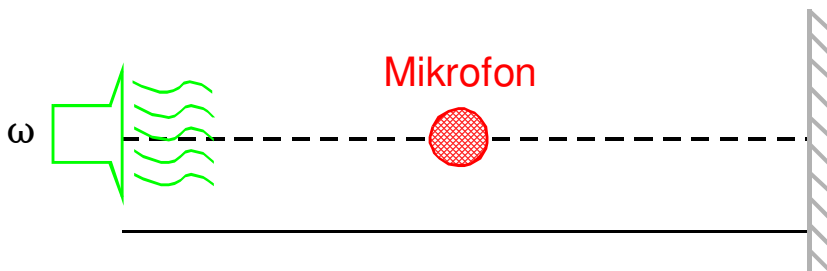
| | |
|--|--|
|  <p style="text-align: center;">dispersionsfrei</p> |  <p style="text-align: center;">Dispersion</p> |
| $\frac{\omega}{k} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ $v_{Ph} = v_{Gr}$ | $\frac{\omega}{k} \neq \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ $v_{Ph} \neq v_{Gr}$ |

6.5.5 Wellen in entgegengesetzter Richtung gleicher Frequenz und gleicher Amplitude

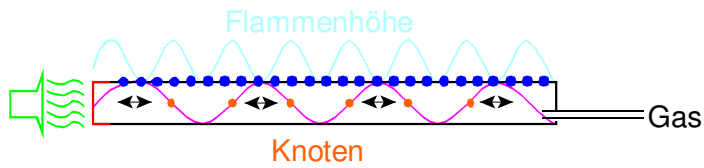


Hinlaufende Welle: $\Psi_{Hin} = \Psi_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot z)$
 Rücklaufende Welle: $\Psi_{Rück} = \Psi_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + k \cdot z)$
 Resultierend: $\Psi_{res} = \Psi_{Hin} + \Psi_{Rück} = 2 \cdot \Psi_0 \cdot \cos(k \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t)$
 Amplitude: $2 \cdot \Psi_0$

Experiment: Akustische stehende Welle

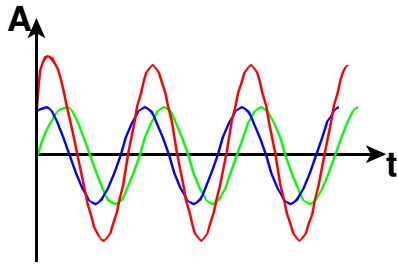


Experiment: Flammenrohr



6.6 Interferenz

6.6.1 Zwei Wellen mit $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ in gleicher Richtung



$$\Psi_1 = A_1 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot z)$$

$$\Psi_2 = A_2 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot z - \delta)$$

$$\Psi_{ges} = \Psi_1 + \Psi_2 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos \delta} \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot z - \varepsilon)$$

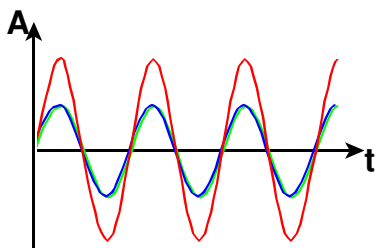
6.6.2 Extremfälle

$$A_1 = A_2 = A$$

1.) $\delta = 0$ oder $\delta = n \cdot 2\pi$

$$\rightarrow A_{res} = 2A$$

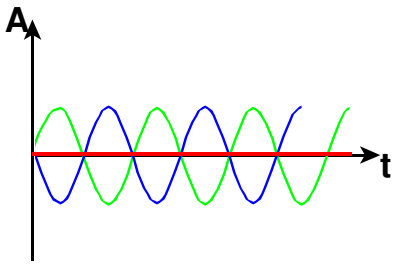
→ konstruktive Interferenz



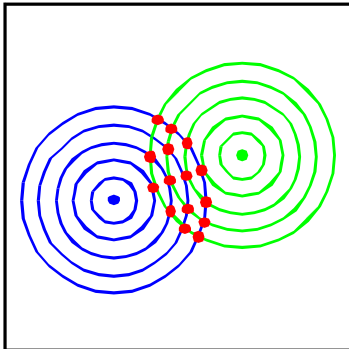
2.) $\delta = \pi$ oder $\delta = (2n+1)\pi$

$$A_{res} = A_1 + A_2 = 0$$

→ destruktive Interferenz



2 Kreiswellen



6.7 Modulation

menschlicher Frequenzbereich: $20 \text{ Hz} < u < 20 \text{ kHz}$

akustisch $\lambda \cdot u = c_s$: $17 \text{ m} > \lambda > 1,8 \text{ cm}$

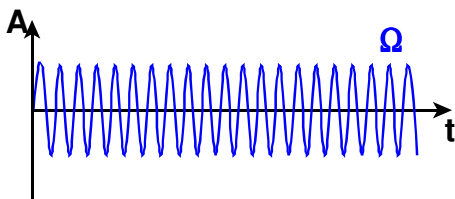
elektromagnetisch $\lambda \cdot u = c$: $15.000 \text{ km} > \lambda > 16 \text{ km}$ (Antennendimension)

technische Lösung: Kombination von Trägerwelle und Informationswelle

6.7.1 Amplitudenmodulation (AM)

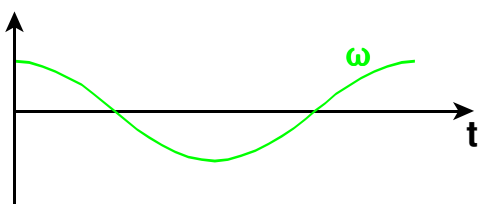
Trägerfrequenz

$$\Psi = \Psi_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t - k \cdot z)$$



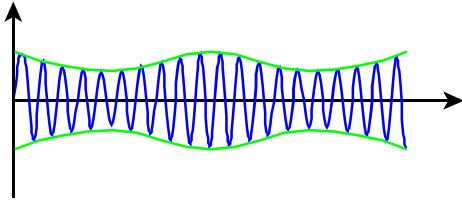
Tonfrequenz

$20 \text{ Hz} < u < 20 \text{ kHz}$



$$\Psi_0(t) = A \cdot (1 + m \cdot \cos(\omega \cdot t))$$

mit m: Modulationsgrad < 1



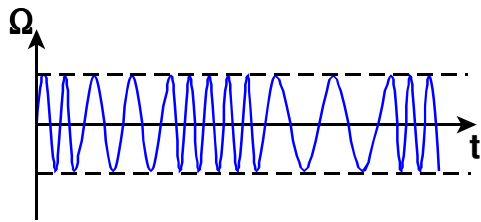
Anwendung

| | | | |
|--------|--------------|-----------------------------|-----------------------|
| Radio: | Kurzwellen | $\lambda = 30 \text{ m}$ | $u = 10 \text{ MHz}$ |
| | Mittelwellen | $\lambda = 300 \text{ m}$ | $u = 1 \text{ MHz}$ |
| | Langwellen | $\lambda = 3.000 \text{ m}$ | $u = 100 \text{ kHz}$ |

6.7.2 Frequenzmodulation (FM)

Anwendung: UKW, TV

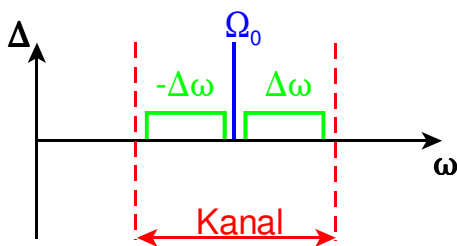
$$\Omega(t) = \Omega_0 \cdot (1 + m \cdot \cos(\omega \cdot t))$$



Ω : Trägerfrequenz

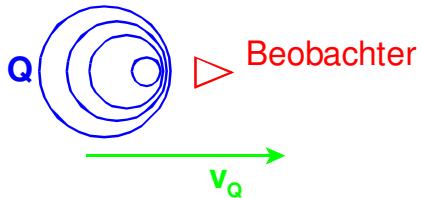
ω : Tonfrequenz

Hinweis: Seitenbänder



6.8 Doppler-Effekt

6.8.1 Ruhender Beobachter



$$v_Q < c_S$$

$$\lambda \cdot \nu = c_S$$

mit c_S : Schallgeschwindigkeit

$$\nu = \frac{1}{T}$$

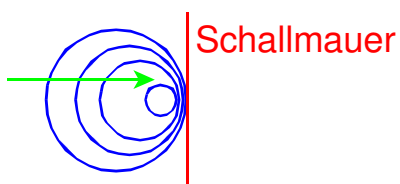
$$\lambda = \lambda_0 - v_Q \cdot T$$

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{v_Q}{\nu_0}$$

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{v_Q}{c_S} \cdot \lambda_0$$

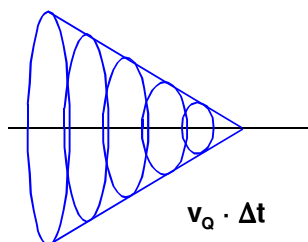
$$\lambda = \lambda_0 \cdot \left(1 - \frac{v_Q}{c_S}\right) \quad \nu = \frac{c_S}{\lambda} = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v_Q}{c_S}}$$

$v_Q = c_S$



$v_Q > c_S$

- Mach'scher Kegel



$$\sin \alpha = \frac{c_S}{v_Q} = \frac{1}{M}$$

mit M: Machzahl $M = \frac{v_Q}{c_S}$

6.8.2 Bei Lichtwellen

Bewegung zueinander

$$v = v_0 \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c_0}}{1 - \frac{v}{c_0}}}$$

mit c_0 : Lichtgeschwindigkeit im Vakuum; v_0 : unveränderte Frequenz; v : Geschwindigkeit der Quelle/Empfänger

→ Blauverschiebung

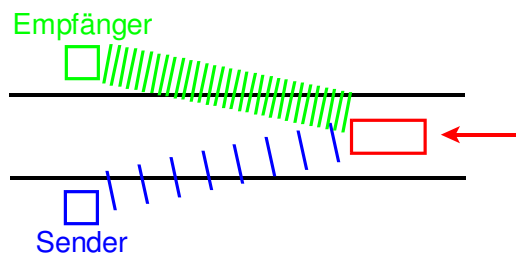
Bewegung auseinander

$$v = v_0 \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c_0}}{1 + \frac{v}{c_0}}}$$

→ Rotverschiebung

6.8.3 Anwendung

Radarfalle:



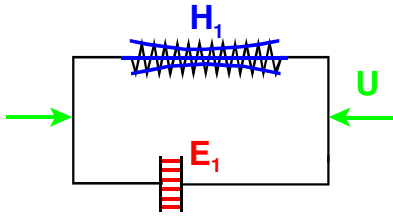
$$\Delta v = v - v_0$$

$$v = c_0 \cdot \frac{\Delta v}{v}$$

6.9 Elektromagnetische Wellen

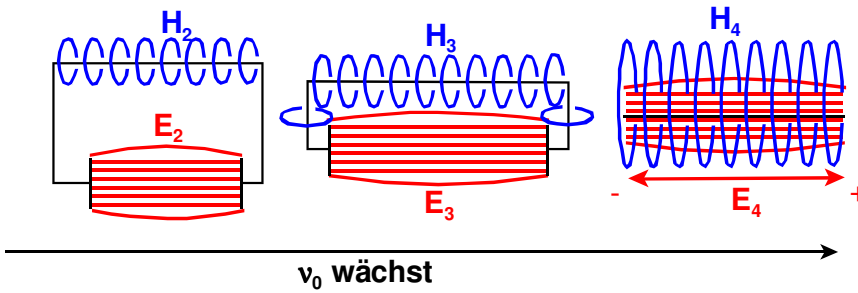
6.9.1 Hertz'scher Dipol

- Abstrahlung von elektromagnetischen Wellen
→ z.B. beim elektrischen Schwingkreis:



mit H: Magnetfeld; E: elektrisches Feld

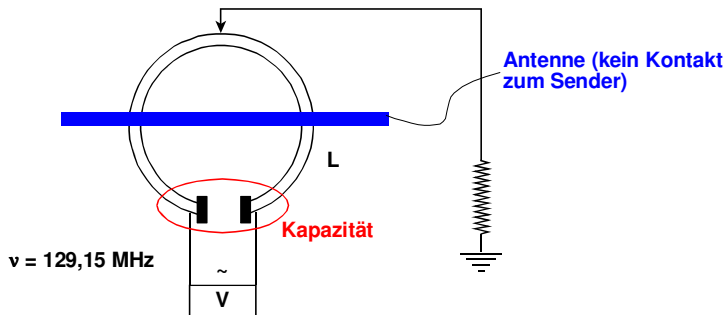
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{C_L}} \quad \omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot \nu_0$$



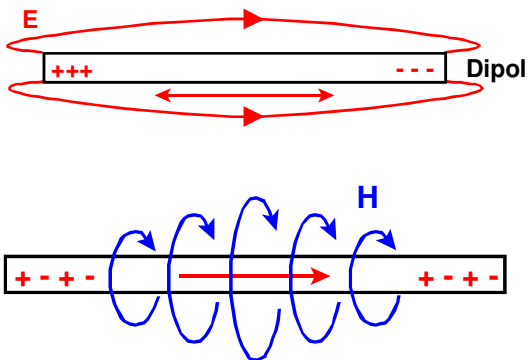
$$H_1 < H_2 < H_3 < H_4$$

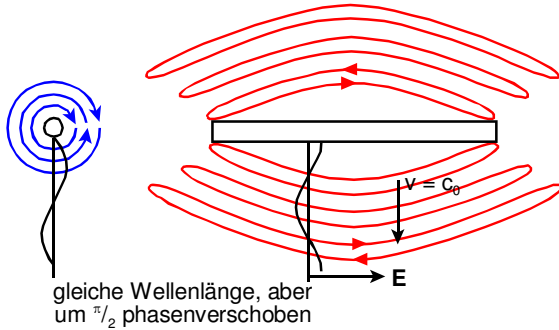
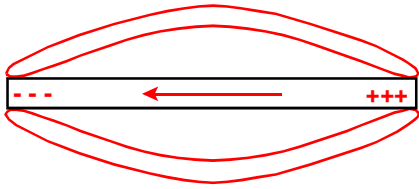
$$E_1 < E_2 < E_3 < E_4$$

Experiment



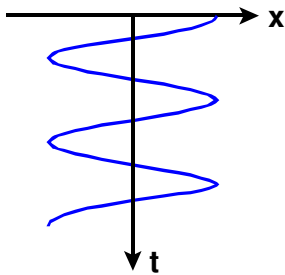
Was passiert im Detail?





$$c_0 = v_0 \cdot \lambda$$

in größerem Abstand: ebene Welle



Dipollänge $\lambda/2$

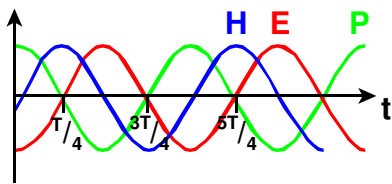
Geschwindigkeit in Antenne: $c^* < c_0$ $c^* = \lambda \cdot \nu$

im Versuch: Stablänge ca. 1 m

Frequenz 130 MHz $\rightarrow \lambda = 2,3$ m

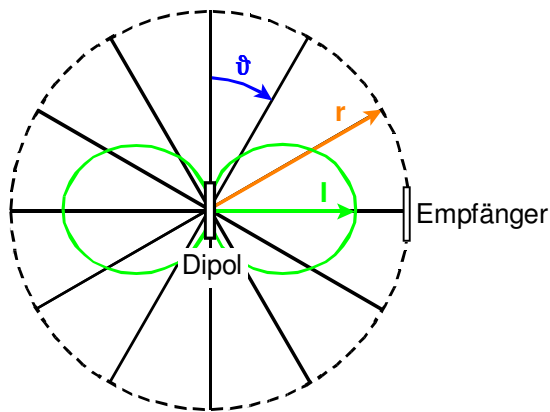
Abstrahlung vom Hertz'schen Dipol

Beobachtung der Felder an einem bestimmten Ort:



Aufbau der elektromagnetischen Welle:

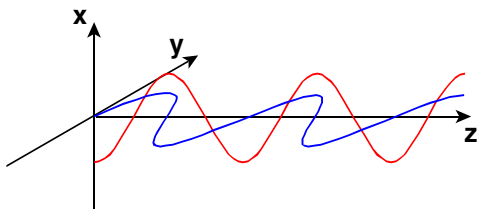
$H \perp E$



H eilt $\pi/2$ dem E-Feld voraus.

Abstrahlcharakteristik eines Hertz'schen Dipols:

$$I \sim \frac{v^4 \cdot \sin^2 \vartheta}{r^2}$$



Kugelwelle: $\frac{1}{r^2}$

Ergebnis:

$$E \sim \frac{\ddot{P}}{r}$$

$$H \sim \frac{\dot{P}}{r}$$

mit P: Dipolmoment

Energie:

→ von Dipol pro Sekunde abgegeben

$$P_{Dipol} = \int I dA = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^3 \cdot c}{\epsilon_0} \cdot \frac{P_0^2}{\lambda^4}$$

Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}$$

Phasengeschwindigkeit: $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

Lösung: $E = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot z)$ $H = H_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot z)$

Energiestrom:

→ Poynting-Vektor

$$j_E = \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Intensität der Welle:

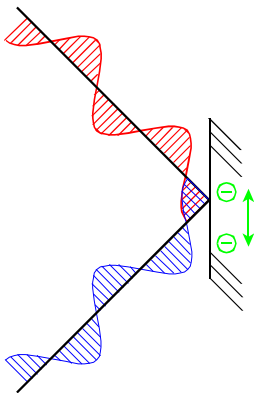
$$I = c_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot E_0^2 \quad \text{mit } [I] = 1 \frac{W}{m^2}$$

6.9.2 Wechselwirkung von elektromagnetischen Wellen mit Leitern

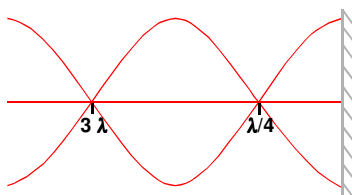
Experimente: Mikrowellen

- linear polarisiert

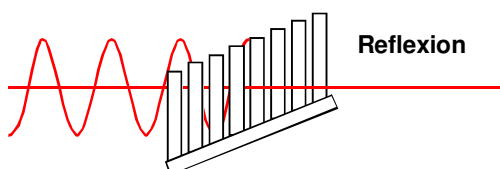
a) Reflexion an Leiterplatte:

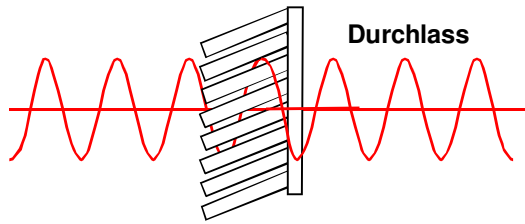


b) stehende Welle

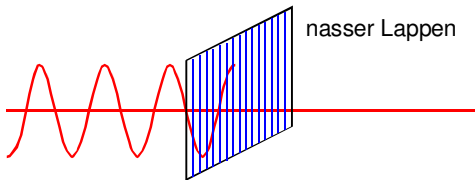
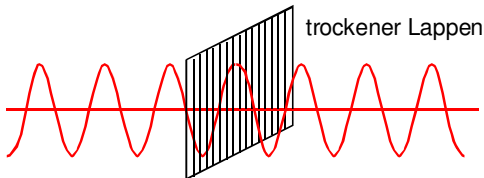


c) Polarisationsfilter





d) Absorption durch z.B. Wasser



Absorption durch Wassermoleküle (Rotationsschwingungen)

6.9.3 Strahlungsdruck

- Impulsstrom

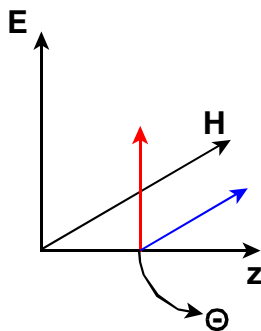
→ Druck auf Oberfläche bei Strahlungsabsorption

$$p_s = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot E_0^2 \quad \text{mit } [p_s] = 1 \frac{N}{m^2}$$

$$p_s = \frac{I}{c_0} \rightarrow \text{Intensität geteilt durch Lichtgeschwindigkeit}$$

→ Kraft der Sonne auf Hand (ca. 1 dm²): 5 · 10⁻⁸ N

Warum? → Lorentzkraft



6.9.4 Wechselwirkung mit Isolatoren

keine freien Ladungen: $\epsilon > 1 \mu > 1$

Wellengeschwindigkeit:

$$c_M = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \mu \cdot \mu_0}} = \frac{c_0}{n}$$

mit M: Material

Brechungsindex: $n = \sqrt{\epsilon}$ da $\mu \approx 1$
(Maxwell-Beziehung)

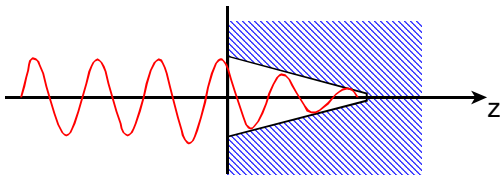
Dämpfung durch Absorption:

$$J_z = J_0 \cdot e^{-\alpha \cdot z}$$

$$J \sim E^2$$

E-Vektor:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cdot e^{-\alpha/2 \cdot z} \cdot \cos(\omega t - k \cdot z)$$



6.9.5 Wellenfeldkonstruktion

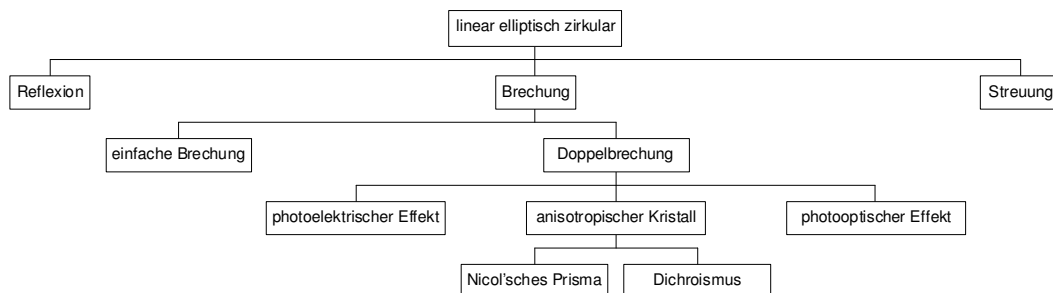
Superposition

$$\Psi_{res} = \Psi_1 + \Psi_2 + \dots$$

Huygens-Fresnel'sches Prinzip

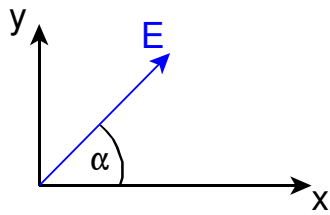
Jeder Punkt des Raumes, der von einer Primärwelle getroffen wird, ist Ausgangspunkt einer Elementarwelle (Kugel). Durch Superposition entsteht resultierende Welle.

6.10.5 Polarisation

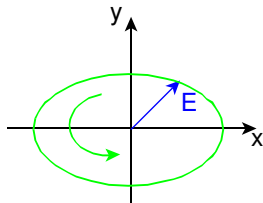


Begriffe

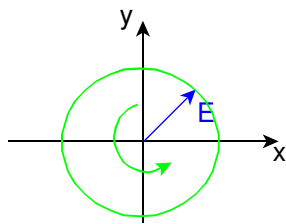
Linear:



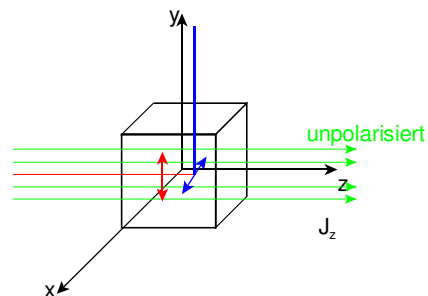
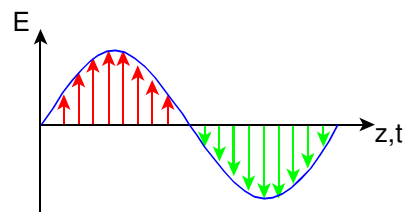
Elliptisch:



Zirkular:



Durch Streuung (Raleigh-Streuung)



Streugesetz:

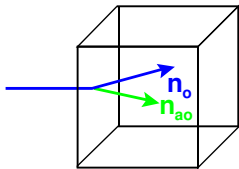
$$J_z = J_0 - e^{-K_S \cdot z}$$

$$K_S \sim \varphi^4$$

$\left. \begin{array}{l} \text{rot} \\ \text{blau} \end{array} \right\} \varphi \text{ Faktor } 2 \rightarrow \text{blau wird 16-mal stärker gestreut als rot}$

Durch Doppelbrechung

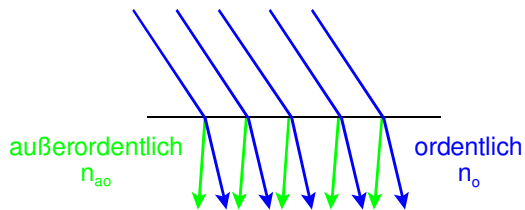
- anisotrope Kristalle



n_o : Brechungsindex des ordentlichen Strahls

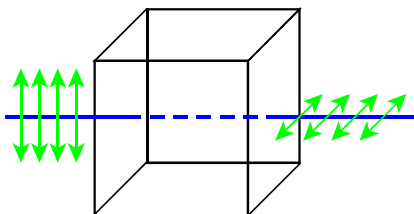
n_{ao} : Brechungsindex des außerordentlichen Strahls

- Beispiel Kalkspat: $\frac{n_{ao}}{n_o} = 1,716$



Optische Aktivität

- Drehung des E-Vektors:



→ proportional zur Weglänge

- Drehwinkel:

- Quarz: + 21,7 °/mm
- Zucker: - 0,885 °/mm

IV. Thermodynamik: Kalorik

1. Allgemein

- Ziel: Verständnis von Wärme \leftrightarrow Kraftmaschine
Beschreibung des thermodynamischen Zustandes eines Systems reeller Materie (komplex!). Durch geringe Zahl makroskopischer Variablen, die der Messung zugänglich sind (z.B. Druck, Volumen, Temperatur) und dessen Änderung.
- Zwei Wege:
 - 1.) Klassische makroskopische Beschreibung \rightarrow phänomenologische Theorie
 - 2.) moderne mikroskopische Beschreibung \rightarrow Atomistik (\rightarrow Statistik)
- Vielteilchensysteme

1.1 Begriffe

1.1.1 System (thermodynamisch)

Teil einer wärmetechnischen Anlage, der interessiert. Beschreibung durch mechanische Größen und Temperatur.

1.1.2 Zustandsgrößen

Beschreibung des Systems. Liefern differentielle Zustandsgleichungen (z.B. $p \cdot V \sim T$).

- primäre Zustandsgrößen:
 - Druck p
 - Volumen V
 - Temperatur T
 - Stoff: Masse m , Stoffmenge n
 - Entropie S
- sekundäre Zustandsgrößen (leiten sich ab aus anderen Größen):
 - innere Energie U
 - Enthalpie H
 - freie Energie A oder F
 - freie Enthalpie G

1.1.3 Gleichgewicht

Zustandsgrößen sind konstant.

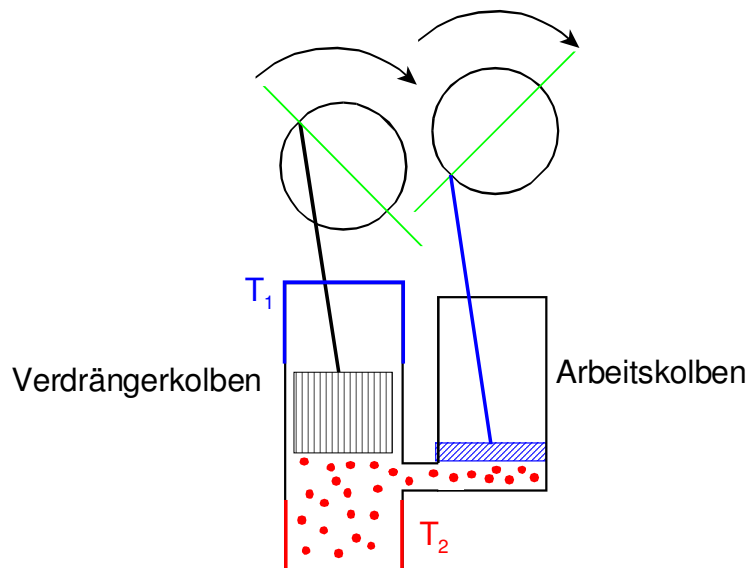
1.1.4 Prozess

= Zustandsänderung.

1.2 Beispiele für Wärmekraftmaschinen

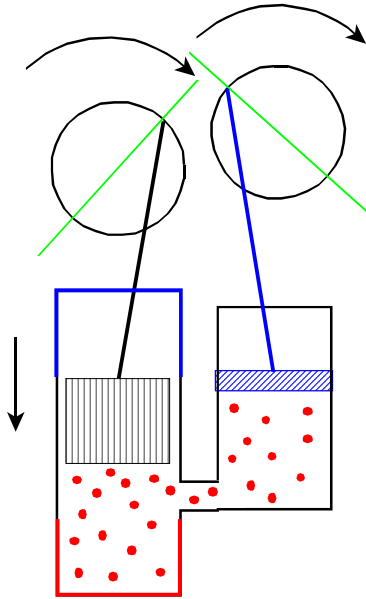
1.2.1 Stirlingmotor

- 1816, 60 Jahre vor Diesel
- Heißluftmotor
- Wärme ↔ Kraftmaschine
- geschlossenes System: Arbeitsgas fest eingeschlossen
- keine Explosionen
- geeignet für Dauerlauf (gleichmäßig)
- Funktionsweise (Kreisprozess):
 - Arbeitstakt:



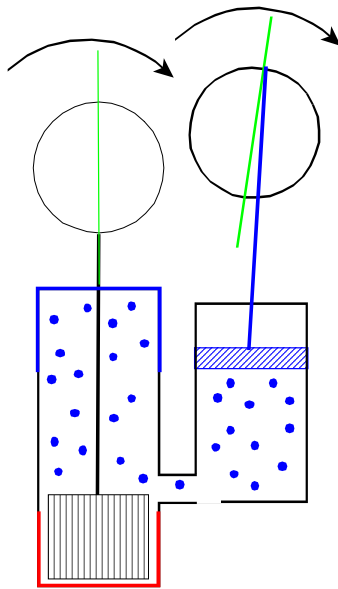
→ Arbeit wird gewonnen!

- Verdrängen:

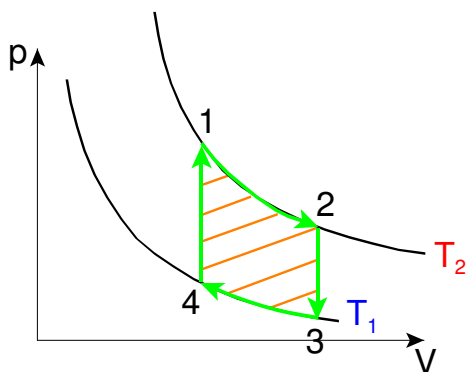
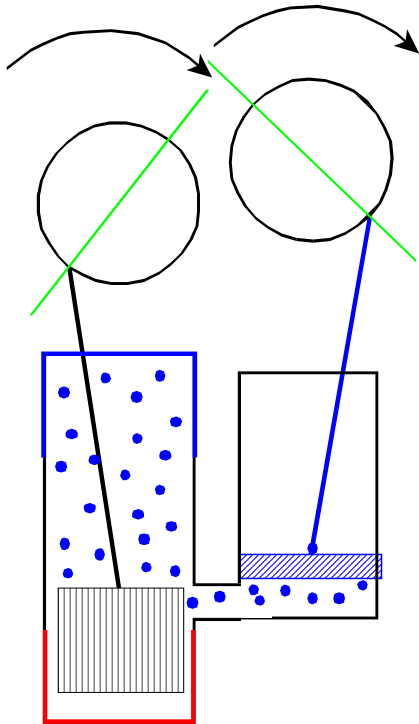


→ warmes Gas wird an kaltes geschoben

- Kompression:



- Verdrängen:

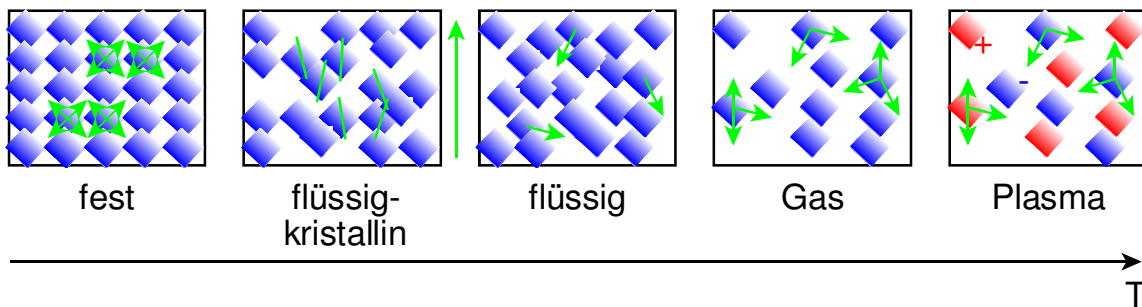


1.3 Atomistisches Bild der Materie

Materie besteht aus Teilchen, die sich bewegen

→ Temperatur

→ Aggregatzustände:



$T \sim E(\text{Teilchen})$

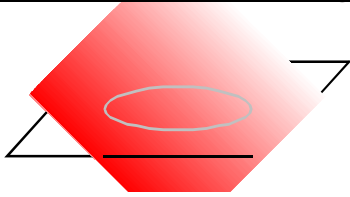
Teilchenbewegung braucht Raum!

2. Wärmeausdehnung

2.1 Wärmeausdehnung bei Feststoffen

2.1.1 Experimente

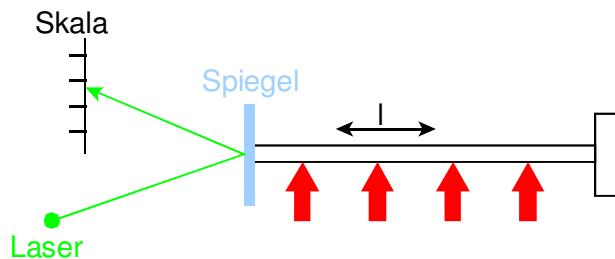
Volumenausdehnung



$$V = V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

mit α : Volumenausdehnungskoeffizient $1/k$

Längenausdehnung



$$\Delta l = 150 \mu m \triangleq 15 kT$$

$$l = l_0 \cdot (1 + \alpha_l \cdot \Delta T)$$

mit α_l : Längenausdehnungskoeffizient $1/k$

2.2 Wärmeausdehnung bei Flüssigkeiten

Ausdehnung flüssig \gg Ausdehnung fest
→ Anwendung: z.B. Flüssigkeitsthermometer

2.3 Wärmeausdehnung bei Gasen

bei konstantem Druck:

$$V = V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t)$$

$$\alpha = \frac{1}{273,15 K}$$

3. Kinetische Gastheorie

Ziel: Allgemeine Zustandsgleichung idealer Gase

3.1 Was ist ein ideales Gas?

- ideale Gase folgen dem idealen Gasgesetz
- Teilchen haben kein Eigenvolumen
- es bestehen keine Wechselwirkungskräfte zwischen Teilchen oder der Gefäßwand (völlig elastische Stöße)

3.1.1 Ausgangssituation

- statistische Bewegung von N (bzw. n mol) Teilchen
 - mittlere Geschwindigkeit \bar{v}
 - mittlerer Impuls \bar{p}
 - mittlere Energie \bar{E}

3.1.2 Beschreibung

- erfolgt mit den thermischen (primären) Zustandsgrößen:

- Druck $p = \frac{F}{A}$ mit $[p] = 1 \frac{N}{m^2} = 1 Pa = 10^{-5} bar$
- Volumen V mit $[V] = 1 m^3$
- Temperatur T mit $[T] = 1 K$

3.1.3 Zwei klassische Experimente

Boyle-Mariotte (1692, 1679)

$$p \cdot V = const.(T)$$

Gay-Lussac/Charles

$$\frac{V}{T} = const.(p)$$

Kombination beider Gesetze

$$\frac{p \cdot V}{T} = const.$$

Bestimmung der Konstanten:

- Einsetzen der Normgrößen (Index n):

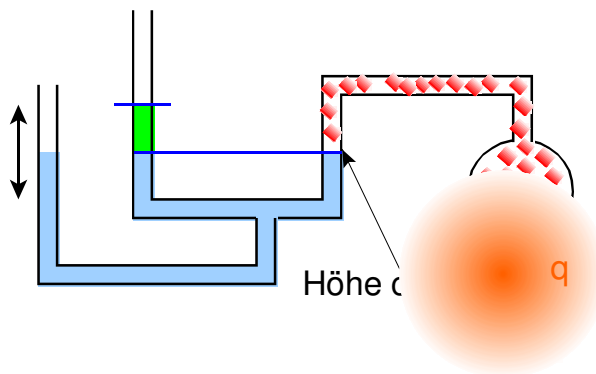
$$\bullet \frac{p_n \cdot V_n}{T_n} = \frac{p \cdot m}{T \cdot \rho}$$

→ $p_n = 1,0135 \text{ bar}$ und $T_n = 273,16 \text{ K}$

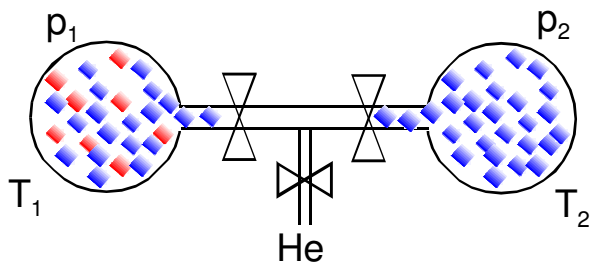
→ p , T und ρ sind in diesem Fall konstant:

$p \cdot V = m \cdot R_i \cdot T$ → Zustandsgleichung auf Masse bezogen
mit R_i : spezielle Gaskonstante

→ Anwendung des Gasgesetzes:



Experiment



$$p_1 = 1,3 \text{ bar} \quad p_2 = 1 \text{ bar}$$

Avogadro: Bei gleichen Bedingungen haben alle Gase das gleiche Molvolumen.

→ Für n Mole beträgt das Normvolumen bei Normbedingungen:

$$V_n = n \cdot V_m$$

mit V_n : Normvolumen; n : Stoffmenge; V_m : Molvolumen

$$\frac{p \cdot V}{T} = \frac{V_n \cdot p_n}{T_n} \cdot n$$

$$\frac{V_n \cdot p_n}{T_n} = R_m$$

mit R_m : universelle Gaskonstante ($R_m = 8,31441 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$)

Daraus folgt das Gasgesetz:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Es gilt die Beziehung: $R_i = \frac{R_m}{M}$ (mit M: Molare Masse)

$$p \cdot V = \underbrace{n \cdot N_A}_N \cdot \underbrace{\frac{R_m}{N_A}}_k \cdot T$$

mit N: Teilchenzahl; k: Boltzmannkonstante ($k = 1,38062 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$)

führt zu:

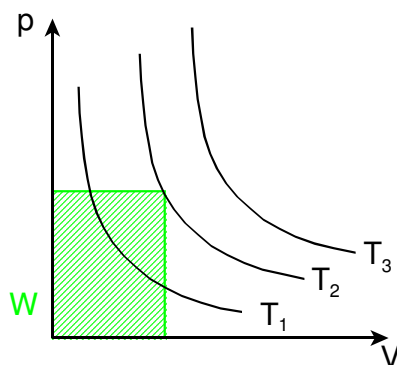
$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T$$

Zusammenfassung

$$p \cdot V = m \cdot R_i \cdot T$$

$$p \cdot V = n \cdot R_m \cdot T$$

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T$$



3.2 Mol, Teilchenmenge, Teilchenzahl, Masse

3.2.1 Numerische Erfassung von Teilchenzahlen

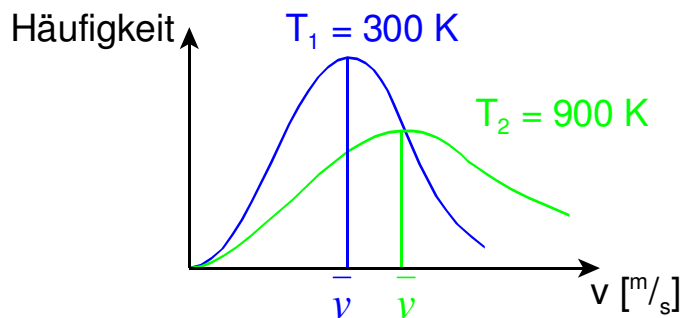
- 1 Mol = N_A Teilchen
 - mit $N_A = 6,0220921 \cdot 10^{23}$
- Stoffmenge n
- Teilchenzahl N
 - $N = n \cdot N_A$

3.2.1 Masse eines Stoffes

- Molare Masse M
 - $M = N_A \cdot \text{Teilchenmasse}$

- Teilchenmasse m_M
 - $m_M = \sum$ Massenzahl der beteiligten Atome · atomare Masseneinheit
 - Massenzahl aus Periodensystem
 - atomare Masseneinheit $u = 1,660565 \cdot 10^{-27}$ kg
- Gesamtmasse eines Stoffes
 - $m = n \cdot M = n \cdot N_A \cdot m_M$

3.3 Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung



Beispiel N_2 :

$$T = 300K \quad \bar{v} = 450 \frac{m}{s} \quad \bar{l} = 85nm \text{ (mittlere freie Weglänge)}$$

3.4 Ergebnis

Teilchen haben mittlere kinetische Energie E_{kin} :

$$\bar{E}_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

→ Gesamtenergie: Summe aller Teilchen

Aus Zustandsgleichung entnimmt man:

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T$$

→ für ein Teilchen: $E_{kin} \approx k \cdot T$

→ mittlere kinetische Energie eines Teilchens: $\bar{E}_{kin} = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$

→ keine Bewegung → keine Energie → absoluter Nullpunkt

3.5 Gleichverteilungssatz der Energie

- im Raum drei Freiheitsgrade der Bewegung (x, y, z)
- Energie pro Freiheitsgrad f: $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot T$
- Verallgemeinert: $E_{kin} = \frac{f}{2} \cdot k \cdot T$
- Freiheitsgrade:
 - 3 Translationsfreiheitsgrade
 - 2- 3 Rotationsfreiheitsgrade
 - Schwingungsfreiheitsgrade

4. Erster Hauptsatz

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$$

mit U: Innere Energie; Q: Wärme; W: Arbeit

Differentiell bei infinitesimal kleinen Änderungen:

$$dU = dQ + dW$$

4.1 Innere Energie

$$U = N \cdot \frac{f}{2} \cdot k \cdot T \quad \text{mit } [U] = 1 J$$

mit N: Anzahl der Teilchen; f: Freiheitsgrade; k: Boltzmann-Konstante

→ U ist die Summe aller Freiheitsgrade der Bewegung

→ T ist proportional zur Summe aller translatorischer Freiheitsgrade

4.2 Wärmeenergie

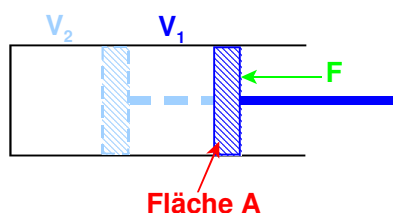
$$\Delta Q = m \cdot c \cdot \Delta T \quad \text{mit } [Q] = 1 J$$

mit m: Masse; c: spezifische Wärmekapazität

$$\Delta Q = n \cdot c_m \cdot \Delta T$$

mit c_m : molare Wärmekapazität

4.3 Volumenänderungsarbeit



4.3.1 Kompression

$$dW = F \cdot ds \qquad F = p \cdot A$$

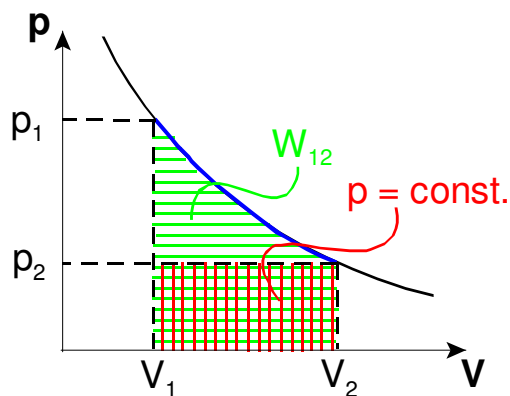
$$dW = p \cdot A \cdot \frac{dV}{A} \qquad dV = A \cdot ds$$

$$dW = -p \cdot dV$$

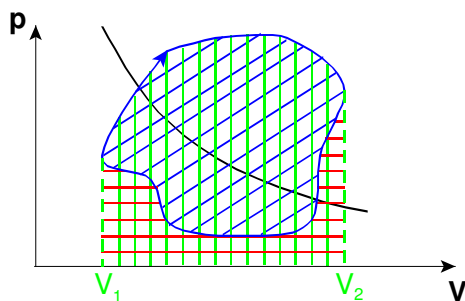
$$\int_{w_1}^{w_2} dW = - \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV \rightarrow W_{12} = - \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV$$

$p = \text{const.}$:

$$W_{12} = -p \cdot (V_2 - V_1)$$



4.4 Kreisprozess



2 Möglichkeiten:

a) Rechtsläufig (im Uhrzeigersinn)

Wärme \rightarrow Kraft

- z.B. Motoren, Kraftwerke

b) Linksläufig (gegen Uhrzeigersinn)

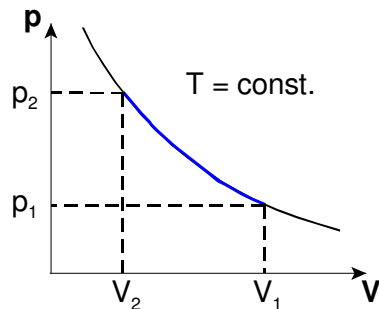
Kraft \rightarrow Wärme

- z.B. Kühlschrank, Wärmepumpe

4.4.1 Beschreibung des Kreisprozesses mit speziellen Zustandsänderungen

- isotherm
- isobar
- isochor
- isentrop (adiabatisch)

Isotherm



$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

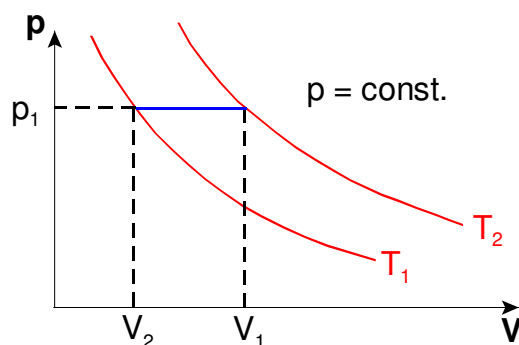
$$p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$$

$$W_{12} = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_1}{V_2}$$

$$Q_{12} = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Delta U = 0$$

Isobar



$$\frac{V}{T} = \frac{n \cdot R}{p} = \text{const.}$$

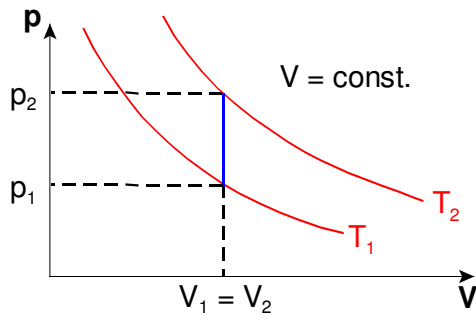
$$W_{12} = -p \cdot \Delta V = -p \cdot (V_2 - V_1)$$

$$Q_{12} = n \cdot C_{p,m} \cdot (T_2 - T_1)$$

mit $C_{p,m}$: molare Wärmekapazität bei $p = \text{const.}$

$$\Delta U = Q + W = Q_{12} + W_{12}$$

Isochor



$$\frac{p}{T} = \frac{n \cdot R}{V} = \text{const.}$$

$$W_{12} = 0$$

$$Q_{12} = n \cdot C_{V,m} \cdot (T_2 - T_1)$$

mit $C_{V,m}$: molare Wärmekapazität bei $V = \text{const.}$

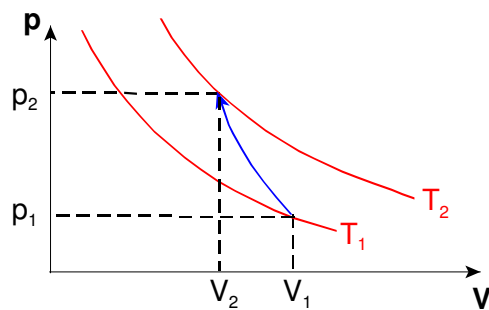
$$\Delta U = \Delta Q = Q_{12}$$

Isentrop

$S = \text{const.} \rightarrow$ adiabatisch

$$\Delta Q = 0$$

$$\Delta U = \Delta W$$



$$-p \cdot dV = C_V \cdot m \cdot dT$$

Poissongleichungen/Adiabatengleichungen:

$$T \cdot V^{\gamma-1} = \text{const.}$$

$$\frac{T^\gamma}{p^{\gamma-1}} = \text{const.}$$

$$p \cdot V^\gamma = \text{const.}$$

Adiabatexponent:

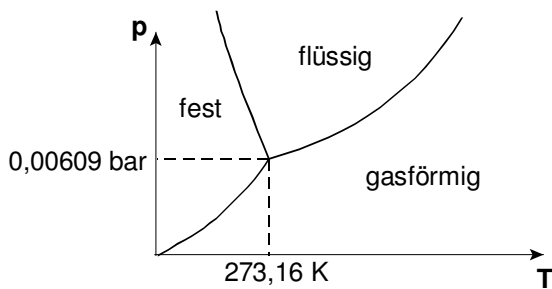
$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} > 1$$

→ z.B. für Luft: $\gamma = 1,4$

5. Reale Gase

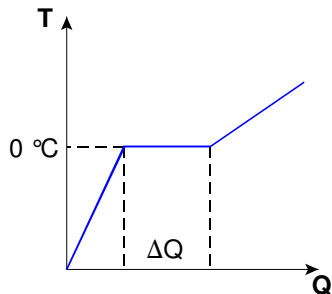
- Phasenübergänge → flüssig, fest
- Wechselwirkung zwischen Teilchen

5.1 Phasendiagramm von Wasser

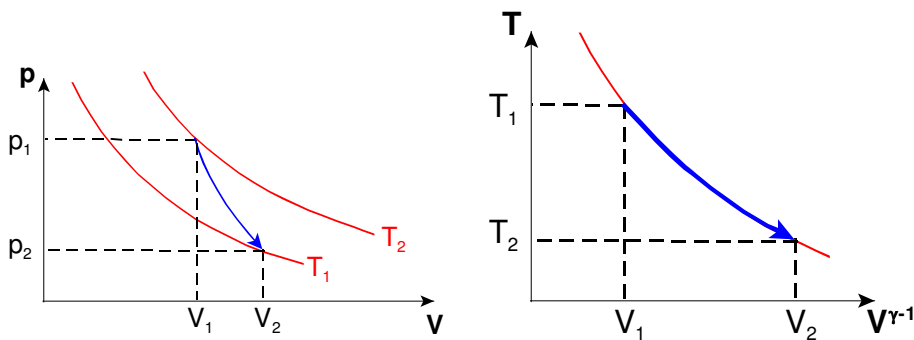


→ Schnittpunkt aller drei Kurven: Tripelpunkt

5.1.1 Beispiel: Phasenübergang Eis in Wasser



5.2 Experiment: CO₂-Gas → Trockeneis



6. Entropie und Zweiter Hauptsatz

- griechisch: Umkehrbarkeit (Latein: Reversibilität)
- reversible Systeme:
 - Pendel (reibungsfrei → keine Wärmeproduktion)
 - Umlenkrolle mit zwei gleichgroßen Massen (masseloser Faden)
→ überall im Gleichgewicht, keine Vorzugsrichtung

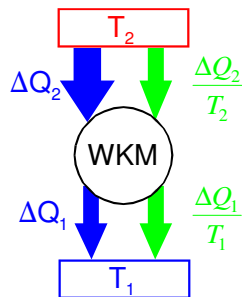
6.1 Der Entropiebegriff

Wie kann man das Maß der Irreversibilität messen?

Ergebnis:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$$

mit S: Entropie (Zustandsgröße)



6.1.1 Statistische Definition

$$S = k \cdot \ln W$$

mit k: Boltzmann-Konstante; W: thermodynamische Wahrscheinlichkeit

7. Wärmeleitung

- stationäre Wärmeleitungsgleichung:

$$\bullet j_Q = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx}$$

mit λ : Wärmeleitfähigkeit [$W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}$]