Hausübung: Man sucht zunächst eine möglichst einfache Funktion, die die Randbedingungen

$$w(t,0)=1, \qquad w(t,\pi)=\sin(t)$$

erfüllt, zum Beispiel

$$w(t,x)=\frac{x}{\pi}\sin(t)+\frac{\pi-x}{\pi}.$$

Damit macht man den Ansatz $u=v+w$. Es folgt

$$\partial_t u=\partial_t v+\partial_t w=\partial_t v+\frac{x}{\pi}\cos(t)\overset{!}{=}\partial_{xx}v+\underbrace{\partial_{xx}w}_{=0}+t\sin(3x)+\frac{x}{\pi}\cos(t)$$

und damit die Differentialgleichung

$$\partial_t v=\partial_{xx}v+t\sin(3x)$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$v(t,0)=v(t,\pi)=0, \qquad v(0,x)=u(0,x)-w(0,x)=\frac{4}{81}\sin^3 x+\frac{x}{\pi}.$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung $\partial_t v-\partial_{xx}v=0$ mit den Randbedingungen $v(t,0)=v(t,\pi)=0$ liefert

$$v(t,x)=v_h(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-n^2t}\sin(nx).$$

Eine Lösung der inhomogenen Gleichung mit denselben Randbedingungen erhält man durch Variation der Koeffizienten, $v_p(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)e^{-n^2t}\sin(nx)$. Es folgt

$$\partial_t v-\partial_{xx}v=\sum_{n=1}^{\infty}\partial_t a_n(t)e^{-n^2t}\sin(nx)\overset{!}{=}t\sin(3x).$$

Koeffizientenvergleich liefert $a_n(t)=0$ für $n\neq 3$ und $a_3(t)=\left(\frac{1}{9}t-\frac{1}{81}\right)e^{9t}$. Die Partikulärlösung ist

$$v_p(t,x)=\left(\frac{1}{9}t-\frac{1}{81}\right)\sin(3x).$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet dann

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-n^2t}\sin(nx)+\left(\frac{1}{9}t-\frac{1}{81}\right)\sin(3x).$$

Aus der Anfangsbedingung

$$v(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(nx)-\frac{1}{81}\sin(3x)=\frac{x}{\pi}+\frac{4}{81}\sin^3 x$$

und den Fourierreihen

$$\frac{4}{81}\sin^3 x=\frac{1}{27}\sin x-\frac{1}{81}\sin(3x) \quad \text{sowie}$$
$$\frac{x}{\pi}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

folgt

$$a_n=\begin{cases}\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} & \text{für } n\neq 1,3,\\ \frac{2}{\pi}+\frac{1}{27} & \text{für } n=1,\\ \frac{2}{3\pi} & \text{für } n=3.\end{cases}$$

Damit ist

$$u(t,x)=\frac{x}{\pi}\sin t+\frac{\pi-x}{\pi}+\frac{1}{27}e^{-t}\sin x+\left(\frac{1}{9}t-\frac{1}{81}\right)\sin(3x)$$
$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}e^{-n^2t}\sin(nx).$$