Übungen zur Vorlesung
Physikalische Chemie II

Übungsleiter: Tanja Asthalter · Zimmer 9–356 · Tel. 4464 · e-mail t.asthalter@ipc.uni-stuttgart.de

Lösungsblatt 22 **16. 12. 2004**

Lösung zu Aufgabe 22.1

$$m_{\mathrm{Na}} = 22,9 \cdot m_H = 3,83 \cdot 10{-}26\,\mathrm{kg}$$

$$\underline{\underline{\Delta p = \frac{h}{\lambda} = 1,125 \cdot 10^{-27}\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}}}$$

$$\underline{\underline{\Delta v = \frac{\Delta p}{m_{\mathrm{Na}}} = 0,029\,\mathrm{m\,/\,s}}}$$

Lösung zu Aufgabe 22.2

a)

$$E_{\mathrm{kin}} = e_0 \cdot U = \frac{1}{2} m_e v^2$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{2e_0 U}{m_e}} = 1,39 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,/\,s} = 1,39 \cdot 10^8\,\frac{0,001\,\mathrm{km}}{\frac{1}{3600}\,\mathrm{h}} = 5 \cdot 10^8\,\mathrm{km\,/\,h}$$

Anmerkung: Erhaltene Geschwindigkeit ist genaugenommen zu hoch, da man bei größeren Energien bereits die relativistische Massenzunahme berücksichtigen muß.

b)

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \lambda_1 + \frac{h}{m_e c_0}(1 - \cos\varphi) \\ &= 0,7104\,\text{Å} \end{aligned}$$

c) Zwei Lösungsmöglichkeiten:

1. Ausprobieren: Minimaler Wert des cos ist -1, zugehöriger Wert ist 180°
2. Man leite die Verschiebung der Wellenlänge nach dem Streuwinkel ab und setze die Ableitung gleich Null (klassische Extremwertaufgabe):

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\lambda}{\mathrm{d}\varphi} = \lambda_c \cdot \sin\varphi = 0$$

$$\rightarrow \sin\varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0^\circ \mathrm{oder} 180^\circ$$

Welcher Wert richitg ist, sieht man erst an der 2. Ableitung. Bei einem Maximum ist diese kleiner als Null (Abwärtskrümmung der zugehörigen Funktion).

$$\frac{\mathrm{d}^2\Delta\Lambda}{\mathrm{d}\varphi^2} = \lambda_c \cdot \cos\varphi$$

Nun ist cos(0°) = +1, aber cos(180°) = -1, also ist 180° das Maximum.

Lösung zu Aufgabe 22.3

Heisenbergsche Unschärferelation:

$$\Delta x \delta p \geq \frac{hbar}{2}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\Delta v}} = \frac{h}{4\pi m_e \Delta x} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}\mathrm{Js}}{4\pi \cdot 9,1095 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg} \cdot 1 \cdot 10^{-10}\mathrm{m}} \underline{\underline{= 5,79 \cdot 10^5\mathrm{m\,s^{-1}}}}$$

Vergleich mit mittlerer Geschwindigkeit des Elektrons nach dem Virialsatz (mit $r = 0{,}5 \cdot 10^{-10}$m):

$$\underline{\underline{v}} = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 r m_e}} = \frac{1,602 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}}{\sqrt{4\pi \cdot 8,8542 \cdot 10^{-12}\mathrm{C}\,/\,\mathrm{Vm} \cdot 0,5 \cdot 10^{-10}\mathrm{m} \cdot 9,1095 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg}}} \underline{\underline{= 2,25 \cdot 10^6\ \mathrm{m\ s^{-1}}}}$$

Die Unschärfe beträgt rund 25 % der Gesamtgeschwindigkeit.

Lösung zu Aufgabe 22.4

Kriterien für eine Wellenfunktion stationärer Zustände:

- Die Wellenfunktion muß für jeden Punkt des Raums eindeutig sein
- Normierbarkeit: das Integral $\int_V \psi^\star \cdot \psi dV$ muß endlich sein
- Die Wellenfunktion muß 2 mal partiell nach kartesischen Koordinaten x (y,z) bzw. nach Polarkoordinaten r (θ, ϕ) ableitbar sein

Prüfung der Funktionen a) — d): Eindeutigkeit ist für alle Funktionen a) — d) erfüllt
Normierbarkeit:

$$\text{a)} \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x) dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{endlich}$$
$$\text{b)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^4 dx = \frac{1}{5} x^5|_{-\infty}^{\infty}, \qquad \text{unendlich}$$
$$\text{c)} \qquad \int_r^{\infty} \mathrm{e}^{-2ar} dr = \frac{-1}{2a} \mathrm{e}^{-2ar}|_0^{\infty} = \frac{1}{2a}, \qquad \text{endlich}$$
$$\text{d)} \qquad \int_{-1}^{1} 1 dx = 2, \qquad \text{endlich}$$

Existenz der 2. Ableitung:

$$\text{a)} \qquad \frac{\partial \cos(x)}{\partial x} = -\sin(x) \qquad \frac{\partial^2 \cos(x)}{\partial x^2} = -\cos(x) \qquad \text{existiert}$$
$$\text{b)} \qquad \frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial^2 x^2}{\partial x^2} = 2 \qquad \text{existiert.}$$
$$\text{c)} \qquad \frac{\partial (\mathrm{e}^{-ar})}{\partial r} = -a\mathrm{e}^{-ar} \qquad \frac{\partial^2 (\mathrm{e}^{-ar})}{\partial r^2} = a^2 \mathrm{e}^{-ar} \qquad \text{existiert}$$

d): $\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x}$: nicht ableitbar an den Sprungstellen $x = \pm 1$

Folgerung: Nur a) und c) erfüllen alle Kriterien und sind als Wellenfunktion geeignet