Übungsleiter: Tanja Asthalter · Zimmer 9–356 · Tel. 4464 · e-mail t.asthalter@ipc.uni-stuttgart.de

Lösungsblatt 21 **10. 12. 2004**

Lösung zu Aufgabe 21.1

a)

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} k_B \cdot T$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m_e}} = 1,168 \cdot 10^5 \,\mathrm{m/s}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\lambda}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v} = \underline{\underline{6,23\,\mathrm{nm}}}$$

b)

$$v = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m_H}} = 2726 \,\mathrm{m/s}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\lambda}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_H v} = \underline{\underline{0,145\,\mathrm{nm}}}$$

c)

$$m = 1000 \,\mathrm{kg/m^3} \cdot 100 \cdot 10^{-18} \,\mathrm{m^3} = 10^{-13} \,\mathrm{kg}$$

$$v = 0,1 \,\mathrm{mm/s} = 10^{-4} \,\mathrm{m/s}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\lambda = 6,6 \cdot 10^{-17} \,\mathrm{m}}}$$

d) 600 km / h = 166,67 m / s $\rightarrow \underline{\underline{\lambda = 4 \cdot 10^{-33} \,\mathrm{m}}}$

Beugung an einem Spalt kann nur erfolgen, wenn einerseits die de Broglie-Wellenlänge etwa so groß wie der Spalt ist, andererseits das gebeugte Objekt (makroskopisch) durch den Spalt paßt. Dies ist bei Elektron und H-Atom möglich, bei Amöbe und Gewehrkugel nicht (Amöbe ist um ca. 11 Größenordnungen, Gewehrkugel um ca. 30 Größenordnungen zu groß).

Lösung zu Aufgabe 21.2

a) Balmer-Formel:

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Z.B. aus der ersten Linie der Lyman-Serie:

$$\tilde{\nu}_{12} = 8,226 \cdot 10^6 \mathrm{m}^{-1} = R \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4} R \rightarrow \underline{\underline{R = 109\,679,4 \mathrm{cm}^{-1}}}$$

Zweite Linie:

$$\tilde{\nu}_{13} = 9,749 \cdot 10^6 \mathrm{m}^{-1} = R \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{9} \right) = \frac{8}{9} R \rightarrow \underline{\underline{R = 109\,679,4 \mathrm{cm}^{-1}}}$$

usw.

b) Diese Wellenlänge ist für jede Serie verschieden. Für die Lyman-Serie gilt:

$$\lambda_\infty = \frac{hc}{R(1-1/\infty)} = \frac{hc}{R} = 91,2\,\mathrm{nm}$$

Für die Balmer-Serie gilt:

$$\lambda_\infty = \frac{hc}{R(1/4-1/\infty)} = \frac{4hc}{R} = 364,7\,\mathrm{nm}$$

Für die Paschen-Serie gilt:

$$\lambda_\infty = \frac{hc}{R(1/9-1/\infty)} = \frac{9hc}{R} = 820,6\,\mathrm{nm}$$

usw.

c)

$$E = e\cdot U = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\rightarrow h = \frac{e\cdot U\cdot\lambda}{c} = \frac{1,602\cdot 10^{-19}\mathrm{C}\cdot 10,2\,\mathrm{V}\cdot 121,6\cdot 10^{-9}\mathrm{m}}{2,9979\cdot 10^{8}\mathrm{m\,/\,s}} = 6,628\cdot 10^{-34}\mathrm{Js}$$

Übergang: $n=2 \rightarrow n=1$ (erste Linie der Lyman-Serie)

Lösung zu Aufgabe 21.3

Für die spektrale Dichte in Abhängigkeit von der Wellenlänge gilt:

$$E(\lambda) = \frac{hc^2}{\lambda^5(\mathrm{e}^{hc/\lambda kT}-1)}$$

Umrechnung in eine Abhängigkeit von der Frequenz:

$$\begin{aligned}
E(\lambda)\mathrm{d}\lambda &= \tilde{E}(\nu)\mathrm{d}\nu \\
\tilde{E}(\nu) &= E(\lambda)\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\nu}
\end{aligned}$$

Mit der Beziehung $\lambda = c/\nu$ gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\nu} = -\frac{c}{\nu^2}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \tilde{E}(\nu) &= \frac{hc^2}{\lambda^5\left(\mathrm{e}^{hc/\lambda kT}-1\right)}\cdot\left(-\frac{c}{\nu^2}\right)\mathrm{d}\nu \\
&= \frac{h\nu^3}{c^2(\mathrm{e}^{hc/\lambda kT}-1)}
\end{aligned}$$

Jetzt bestimmen wir zunächst durch Ableiten nach λ das Maximum von $E(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[\frac{hc^2\lambda^{-5}}{\mathrm{e}^{hc/\lambda kT}-1}\right] \\
&= hc^2\frac{(\mathrm{e}^{hc/\lambda kT}-1)(-5\lambda^{-6})-\lambda^{-5}\mathrm{e}^{hc/\lambda kT}(-hc/\lambda^2 kT)}{(\mathrm{e}^{hc/\lambda kT}-1)^2} \\
\rightarrow 5(\mathrm{e}^{hc/\lambda kT}-1)\cdot\frac{5}{\lambda^6} &= \frac{hc}{\lambda^7 kT}\mathrm{e}^{hc/\lambda kT}
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $x = hc/\lambda kT$ erhalten wir die transzendente Gleichung

$$x = 5(1 - \mathrm{e}^{-x}) \quad ,$$

die z.B. durch Iteration mit dem Taschenrechner gelöst werden kann. Die Lösung ist $\underline{\underline{x = 4,96511}}$. Durch Auflösen nach $\lambda_{\max}$ erhalten wir mit $T = 5800\,\mathrm{K}$

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{xkT} = 0,0028978\,\mathrm{K/m} \cdot \frac{1}{T} = 499,6\,\mathrm{nm}$$

Jetzt wiederholen wir die ganze Prozedur für die Frequenz:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\tilde{E}(\nu)}{\mathrm{d}\nu} &= -\frac{h}{c^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\frac{\nu^3}{\mathrm{e}^{hc/\lambda kT} - 1} \\
&= -\frac{h}{c^2}\frac{(\mathrm{e}^{hc/\lambda kT} - 1)3\nu^2 - \nu^3\mathrm{e}^{hc/\lambda kT}h/kT}{(\mathrm{e}^{hc/\lambda kT} - 1)^2}
\end{aligned}$$

Hier lautet die transzendente Gleichung (mit gleicher Substitution)

$$x = 3(1 - \mathrm{e}^{-x}) \quad ,$$

und ihre Lösung ist $\underline{\underline{x = 2,82144}}$. Damit ergibt sich die maximale Frequenz

$$\nu_{\max} = \frac{xkT}{h} = 3,41 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}$$

Rechnet man dies in Wellenlängen um, so kommt man auf $\lambda'_{\max} = c/\nu_{\max} = 879{,}2\,\mathrm{nm}$.

Wie kann das sein?

Die Lösung des Rätsels besteht darin, daß wir zueinander inverse Skalen haben und daß die spektrale Dichte je Skaleneinheit mit der Breite eben dieser Skaleneinheit zusammenhängt. Beim Umrechnen einer in die andere Skala wird mit verschieden breiten Skaleneinheiten gewichtet.