



Übungen zur Vorlesung Physikalische Chemie II

Übungsleiter: Tanja Asthalter · Zimmer 9-356 · Tel. 4464 · e-mail t.asthalter@ipc.uni-stuttgart.de

Lösungsblatt 23

21. 12. 2004

Aufgabe 23.1

Der Impulsoperator lautet:

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \quad (1)$$

Daraus folgt für den Erwartungswert des Impulses:

$$\langle p \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^* \hat{p} \varphi dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^* \varphi dx} \quad (2)$$

$$\varphi_1 = e^{ikx} \quad (3)$$

(1) und (3) in (2) eingesetzt:

$$\langle p \rangle = \frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \frac{d}{dx} e^{ikx} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{ikx} dx} = \hbar k \quad (4)$$

$$\varphi_2 = \cos(kx) \quad (5)$$

(1) und (5) in (2) eingesetzt:

$$\langle p \rangle = \frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \cos(kx) \frac{d}{dx} \cos(kx) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(kx) dx} = -\frac{\hbar k}{i} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \cos(kx) \sin(kx) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(kx) dx} = 0 \quad (6)$$

$$\varphi_3 = e^{-ax^2} \quad (7)$$

(1) und (7) in (2) eingesetzt:

$$\langle p \rangle = \frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \frac{d}{dx} e^{-ax^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ax^2} dx} = -2a \cdot \frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-2ax^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ax^2} dx} = 0 \quad (8)$$

Lösung zu Aufgabe 23.2

Generall soll überprüft werden, ob gilt:

$$\hat{O}f(x) = \lambda \cdot f(x),$$

wobei λ eine Konstante ist. Man leite $f(x)$ also zweimal ab und schaue, ob $f''(x)$ die gleiche oder eine andere funktionale Form hat als $f(x)$; in ersterem Fall ist der Eigenwert gleich $f''(x)/f(x)$.

a)

$$e^{ikx} \xrightarrow{d/dx} i k e^{ikx} \xrightarrow{d/dx} -k^2 e^{ikx}$$

→ Funktion ist Eigenfunktion mit Eigenwert $-k^2$.

b)

$$ax + b \xrightarrow{d/dx} a \xrightarrow{d/dx} 0$$

→ Funktion ist Eigenfunktion zum Eigenwert 0.

c)

$$\sin x + \cos x \xrightarrow{d/dx} \cos x - \sin x \xrightarrow{d/dx} -\sin x - \cos x$$

→ Funktion ist Eigenfunktion mit Eigenwert -1.

d)

$$\cos(kx) \xrightarrow{d/dx} -k \sin(kx) \xrightarrow{d/dx} -k^2 \cos(kx)$$

→ Funktion ist Eigenfunktion mit Eigenwert -k².

e)

$$e^{ax^2} \xrightarrow{d/dx} 2axe^{ax^2} \xrightarrow{d/dx} (1 + 2ax^2)e^{ax^2}$$

→ Funktion ist keine Eigenfunktion.

f)

$$x \sin x \xrightarrow{d/dx} \sin x + x \cos x \xrightarrow{d/dx} 2 \cos x - x \sin x$$

→ Funktion ist keine Eigenfunktion.

Lösung zu Aufgabe 23.3

Ebene Welle mit Normierungsfaktor:

$$\psi(x, y, z) = a \cdot e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

Betragsquadrat:

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{!}{=} \langle \psi^* \psi \rangle \\ &= A^2 \iiint \psi^* \psi \, dx dy dz \\ &= A^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \, dx dy dz \\ &= A^2 \cdot x \Big|_{-L/2}^{L/2} \cdot y \Big|_{-L/2}^{L/2} \cdot z \Big|_{-L/2}^{L/2} \\ &= L^3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\underline{\underline{L^{\frac{3}{2}}}}}$$

Auffallend ist, daß der Normierungsfaktor für unendlich großes L verschwindet, mit anderen Worten, ψ hat über den gesamten Raum keinen endlichen Betrag. Im Mathematikerjargon sagt man auch, ψ ist nicht quadratintegabel.

Lösung zu Aufgabe 23.4

Um nicht nur Punkte zu schrubbten und da ja theoretisch die motiviertesten Studenten in den PC II-Übungen sind, denke ich, es wäre lohnend, mal eine kleine Diskussion über den Artikel anzutriggern.

Mögliche Anhaltspunkte:

Hat jemand den Artikel gelesen, wie gefiel er Euch, findet Ihr die Philosophie hinter der QM spannend oder ist sie Euch total wurscht?

Für welcher bisher durchgenommenen Phänomene / für welche Alltagsphänomene braucht man die QM, für welche nicht?

Glaubt Ihr, daß die QM uns helfen kann, Probleme wie die Frage, ob es einen freien Willen gibt, zu lösen? Oder sollte sich die Wissenschaft aus solchen Diskussionen heraushalten und als reines Tool zum Broterwerb dienen?

Wird mit den Bertlmannschen Socken das Problem des Vorauswissens bzw. der Korrelation gelöst oder nur auf eine andere Ebene verlagert?

Die Liste läßt sich natürlich beliebig fortsetzen...
Viel Spaß beim Diskutieren!