Übungsleiter: Tanja Asthalter · Zimmer 9–356 · Tel. 4464 · e-mail t.asthalter@ipc.uni-stuttgart.de

Lösungsblatt 22 **17. 1. 2006**

Lösung zu Aufgabe 22.1

a)

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ kein Eigenvektor

b)

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Eigenvektor zum Eigenwert 1

c)

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ kein Eigenvektor

d)

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Eigenvektor zum Eigenwert 2

Lösung zu Aufgabe 22.2

a)

Berechnung der Norm:

$$\int_0^L \psi^*(x)\psi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x$$

Integration kann man per Integraltabelle oder „zu Fuß“ durchführen. Hier letztere Variante:

$$\int \underbrace{\sin ax}_{=u}\underbrace{\sin ax}_{v'}\mathrm{d}x = \underbrace{\sin ax}_{=u}\underbrace{-\frac{1}{a}\cos ax}_{=v} - \int \underbrace{a\cos ax}_{u'}\underbrace{(-\frac{1}{a}\cos ax)}_{=v}\mathrm{d}x$$

$$\rightarrow 2\int \sin^2 ax\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\sin ax\cos ax + x \quad \rightarrow \quad \int \sin^2 ax\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{a}\sin ax\cos ax\right)$$

Norm wegen $a = \pi/L$ daher:

$$\begin{aligned}
\int_0^L \psi^*(x)\psi(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{L}\left[\frac{x}{2} - \frac{L}{2\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^L \\
&= \frac{1}{L}\left[\frac{L}{2} - \frac{L}{2\pi}\underbrace{\sin\pi}_{=0}\cos\pi - 0 + \frac{L}{2\pi}\underbrace{\sin 0}_{=0}\cos 0\right] \\
&= \frac{1}{2} \neq 1
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Funktion ist <u>nicht</u> normiert. Richtig muß es heißen

$$\underline{\underline{\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}}$$

b) Wahrscheinlichkeit für Intervall von 0 bis $L/4$: Integration der Wahrscheinlichkeits*dichte* über dieses Intervall. Also:

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^{L/4} \psi^*(x)\psi(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{L}\int_0^{L/4} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{L}\left[\frac{x}{2} - \frac{L}{2\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^{L/4} \\
&= \frac{2}{L}\left[\frac{L}{8} - \frac{L}{2\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0 + \frac{L}{2\pi}\sin 0\cos 0\right] \\
&= \frac{2}{L}\left[\frac{L}{8} - \frac{L}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\right] \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \\
&= \underline{\underline{0,0908}}
\end{aligned}$$

c)

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x) = x\sqrt{\frac{2}{L}}\cdot\frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\psi(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sqrt{\frac{2}{L}}x\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{L}}\left[\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{\pi x}{L}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]
\end{aligned}$$

Beide Ausdrücke sind verschieden, x und $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ kommutieren also nicht.

d) (i) und (iv): Multiplikation mit x bzw. x^2 führt zu nicht konstantem Vorfaktor $\rightarrow$ keine Eigenfunktion

(ii) Einmal ableiten führt zu Cosinus, kein Vielfaches der Sinusfunktion $\rightarrow$ keine Eigenfunktion

(iii) Eigenfunktion zu folgendem Eigenwert:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\frac{\pi}{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \sqrt{\frac{2}{L}}\frac{\pi}{L}\left[-\frac{\pi}{L}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]$$

Eigenwert ist daher gleich $\underline{\underline{-\pi^2/L^2}}$.

Lösung zu Aufgabe 22.3

Der Impulsoperator lautet:

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tag{1}$$

Daraus folgt für den Erwartungswert des Impulses:

$$\langle p \rangle = \frac{\int\limits_x \varphi^* \hat{p} \varphi \, \mathrm{d}x}{\int\limits_x \varphi^* \varphi \mathrm{d}x} \tag{2}$$

$$\varphi_1 = \mathrm{e}^{ikx} \tag{3}$$

(1) und (3) in (2) eingesetzt:

$$\langle p \rangle = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \cdot \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x} = \underline{\underline{\hbar k}} \tag{4}$$

Die vorige Gleichung ist nicht ganz trivial, da das Integral eigentlich divergiert. Da es sowohl im Zähler als auch im Nenner steht, kann man es als Nicht-Mathematiker guten Gewissens wegkürzen...

$$\varphi_2 = \cos(kx) \tag{5}$$

(1) und (5) in (2) eingesetzt:

$$\langle p \rangle = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \cdot \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(kx) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos(kx) \mathrm{d}x}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos^2(kx) \mathrm{d}x} = -\frac{\hbar k}{\mathrm{i}} \cdot \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(kx) \sin(kx) \mathrm{d}x}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos^2(kx) \mathrm{d}x} = \underline{\underline{0}} \tag{6}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, weil der Integrand ungerade ist.

$$\varphi_3 = \mathrm{e}^{-ax^2} \tag{7}$$

(1) und (7) in (2) eingesetzt:

$$\langle p \rangle = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \cdot \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^{-ax^2} \mathrm{d}x}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \mathrm{e}^{-ax^2} \mathrm{d}x} = -2a \cdot \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \cdot \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \mathrm{e}^{-2ax^2} \mathrm{d}x}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2ax^2} \mathrm{d}x} = \underline{\underline{0}} \tag{8}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, weil der Integrand ungerade ist.