Mathematik I

J. Hellmich

Stuttgart
Sommer 2008

Autor: Dr. Jürgen Hellmich
72070 Tübingen

Mathematik I

Stand: 2.04.2008

Inhaltsverzeichnis

I Differentialrechnung

I.1 Der Funktionsbegriff

I.1.1 Erste Annäherung *Eine reelle Funktion ist durch eine Vorschrift gegeben, nach der Zahlen aus* $\mathbb{R}$ *auf eindeutige Weise wiederum Zahlen aus* $\mathbb{R}$ *zugeordnet werden.*

$\boxed{\text{B}}$ Verbale Beschreibung einer Vorschrift:

Ordne einer Zahl ihr Quadrat zu.

Ziehe aus einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel.

Bilde aus einer Zahl ihren Kehrwert.

Quadriere eine gegebene Zahl, addiere 3 und teile das Ergebnis durch die Zahl.

$\vdots$

Der Nachteil einer verbalen Funktionsbeschreibung liegt offensichtlich in ihrer Schwerfälligkeit und Unübersichtlichkeit, wie das letzte Beispiel zeigt.

I.1.2 Formalisierung der Funktionsbeschreibung:

Verbale Beschreibung:	Formalisierung:	
gegebene Zahl, beliebige Zahl, jeder Zahl, $\vdots$	$x \in \mathbb{R}$	$(t, u, \ldots \in \mathbb{R})$
quadriere	x^2	
ziehe Wurzel	$\sqrt{u}$	
bilde den Kehrwert	$\frac{1}{t}$	
$\vdots$	$\vdots$	
Funktionsname	f	$(g, h, k, \ldots)$
Funktionswert	$f(x)$	$(g(t), h(u), k(x), \ldots)$
zuordnen	$\mapsto$	
Funktion	$f : x \mapsto f(x)$	$f(x) = \ldots$

$\boxed{\text{B}}$

$$f : x \mapsto x^2\,, \qquad \text{oder} \qquad f(x) = x^2\,.$$

$$g : u \mapsto \sqrt{u}\,, \qquad \text{oder} \qquad g(u) = \sqrt{u}\,.$$

$$h : t \mapsto \frac{1}{t}\,, \qquad \text{oder} \qquad h(t) = \frac{1}{t}\,.$$

$$k : x \mapsto \frac{x^2+3}{x}\,, \qquad \text{oder} \qquad k(x) = x + \frac{3}{x}\,.$$

Damit können wir nun beliebige Funktionen bilden, einfach dadurch, daß wir die Vorschrift zur Berechnung des Funktionswertes durch eine Formel angeben, die mit Hilfe der Variablen x (oder t, u, ...) ausgedrückt wird.

$\boxed{\text{B}}$ $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3+8}\,, \quad g(t) = \sin(t^2-1)\,, \quad h(u) = \dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}\,, \ldots$

Funktionswerte $f(x)$ zu konkreten Variablenwerten x erhalten wir durch Ersetzen von x durch eben diese Werte:

$\boxed{\text{B}}$ $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3+8}$:

$$x = 0: \quad f(0) = \frac{0-1}{0+8} = -\frac{1}{8}, \quad x = 1: \quad f(1) = \frac{1-1}{1+8} = 0,$$

$$x = -1: \quad f(-1) = \frac{1-1}{-1+8} = 0, \quad x = -2: \quad f(-2) = \frac{4-1}{-8+8} = \frac{3}{0}, \text{ geht nicht!}$$

Problem: Nicht immer dürfen alle x-Werte aus $\mathbb{R}$ eingesetzt werden.

$\boxed{\text{B}}$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+8}\,, \qquad x \neq -2\,,$$

$$g(x) = \sqrt{x}\,, \qquad x \geq 0\,,$$

$$k(x) = \frac{1}{x}\,, \qquad x \neq 0\,.$$

Diese Beispiele zeigen, daß zur vollständigen Beschreibung einer Funktion noch die Angabe des Bereichs zulässiger x-Werte gehört.

I.1.3 Zweite Annäherung *Eine reelle Funktion* f *ist durch eine Vorschrift* $x \mapsto f(x)$ *gegeben, nach der Zahlen* x *aus einer Teilmenge* D_f *von* $\mathbb{R}$ *auf eindeutige Weise Zahlen* $f(x)$ *aus* $\mathbb{R}$ *zugeordnet werden.* D_f *ist der Definitionsbereich der Funktion* f. *Unter* W_f *verstehen wir den Wertebereich, d.h., die Menge aller möglichen Zahlen, die als Funktionswerte von* f *vorkommen. Wir verwenden die Schreibweise* $f : x \mapsto f(x)$, $x \in D_f$, *wobei* $f(x)$ *meist durch einen konkreten Formelausdruck in der Variablen* x *angegeben ist, oder wir geben die Vorschrift* $f(x)$ *einfach an:* $f(x) = \ldots$, $x \in D_f$.

B

$$f : x \mapsto x^2\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \qquad \text{oder} \qquad f(x) = x^2\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$$

$$g : x \mapsto \sqrt{x}\,, \quad D_g = \mathbb{R}^+, \qquad \text{oder} \qquad g(x) = \sqrt{x}\,, \quad x \geq 0\,.$$

$$h : x \mapsto \frac{1}{x}\,, \quad x \neq 0\,, \qquad \text{oder} \qquad h(x) = \frac{1}{x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

In diesen Beispielen wurde der maximale Definitionsbereich angegeben (hinter der Funktionsvorschrift als Bedingung an die Variable x), d.h., der maximal mögliche Bereich von Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für die die Vorschriften $f(x)$, $g(x)$, ... noch anwendbar sind. D_f muß aber durchaus nicht der maximale Definitionsbereich einer Funktion sein. Es kann mitunter sinnvoll sein, den Definitionsbereich als Teilmenge des maximal möglichen zu wählen. So ist $f(x) = x^2$ natürlich für alle $x \in \mathbb{R}$ sinnvoll ausführbar. Durch Einschränkung dieser Vorschrift auf $\mathbb{R}^+$ erhalten wir eine *andere* Funktion $k(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}^+$. Diese ist, im Gegensatz zu f, umkehrbar, d.h., die Gleichung $y = k(x)$ läßt sich durch $x = \sqrt{y}$ eindeutig nach x auflösen, während $y = f(x)$ normalerweise zwei Lösungen $x_{1/2} = \pm\sqrt{y}$ besitzt. An diesem Beispiel wird deutlich, daß eine Abänderung des Definitionsbereichs normalerweise auch tatsächlich qualitative Unterschiede der beteiligten Funktionen nach sich zieht.

Merke: Zu einer Funktion f gehört neben der Angabe der Vorschrift $x \mapsto f(x)$, nach der aus der Variablen x der Funktionswert $f(x)$ zu bilden ist, immer auch der Definitionsbereich D_f, der den Zahlenbereich der zulässigen x-Werte beschreibt.
Wenn bei der Definition einer Funktion der Definitionsbereich nicht explizit angegeben wurde (was mitunter bequem ist, wenn die zulässigen x-Werte offensichtlich sind und keine Einschränkung auf einen kleineren Bereich gewünscht ist), dann ist immer der maximal mögliche Definitionsbereich zu nehmen.

I.1.4 Übersichtlichkeit Die Formalisierung des Funktionsbegriffs gibt uns ein leistungsfähiges Werkzeug zur Konstruktion vielfältiger Funktionen an die Hand. Wie steht es aber mit der Übersicht über den Verlauf solcher Funktionen? D.h., was macht eine gegebene Funktion eigentlich genau? Wo genau liefert sie z.B. positive Werte (eventuell wichtig, wenn sie eine Kostenentwicklung oder eine Gewinnerwartung beschreibt), wo wächst sie und wie stark (z.B. das Wachstumsverhalten der Weltbevölkerung), nimmt sie ihre größten oder ihre kleinsten Werte an und wenn ja, wo ...?
Eine erste Methode, sich einen Überblick über den Funktionsverlauf zu verschaffen, kann darin bestehen, einfach eine Wertetabelle anzulegen:

B

x	...	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	...
$g(x) = x^2$	...	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9	...

x	...	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	...
$f(x) = x - \frac{3}{x}$	...	-2	$-\frac{1}{2}$	2	$\frac{11}{2}$	$--$	$-\frac{11}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	2	...

Während im ersten Beispiel tatsächlich ein gewisser Überblick über den Funktionsverlauf gewonnen wird, ist das beim zweiten Beispiel nicht mehr der Fall. Auch das Hinzufügen weiterer x-Werte löst das Problem nicht wirklich: Man muß schon etwas mehr über die Funktion wissen, um die richtigen Stellen zu finden, an denen sie mit einem feineren x-Raster ausgewertet werden muß (bei f handelt es sich um das Verhalten in einer Umgebung von 0 und um das Verhalten für $x \to \pm\infty$). x-Werte, an denen eine Funktion einen maximalen oder einen minimalen Wert annimmt, lassen sich in einer Wertetabelle normalerweise nur ungefähr erkennen.

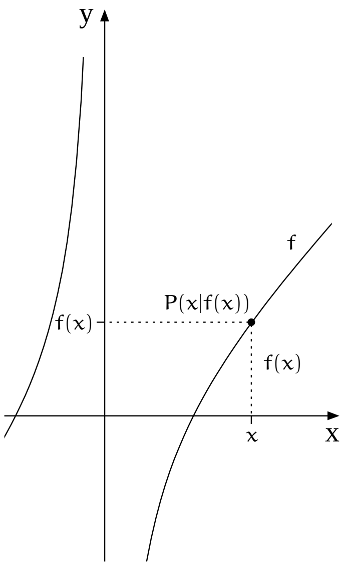


Abbildung I.1
Funktionen graphisch darstellen

Ein erster Schritt, um diese Schwierigkeiten zu überwinden, besteht darin, den Funktionsverlauf graphisch in einem rechtwinkligen Koordinatensystem in der Ebene $\mathbb{R}^2$ darzustellen. Dabei tragen wir die x-Werte auf der waagrechten Achse – der x-*Achse* –, die zugehörigen Funktionswerte $f(x)$ senkrecht darüber oder darunter auf, je nachdem, ob $f(x)$ positiv, oder negativ ist. Wenn x dann den Definitionsbereich D_f durchläuft, wandern die Punkte $(x|f(x))$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ auf einer Linie, die den sog. *Graphen* der Funktion f wiedergibt. Wir führen für ihn keine neue Notation ein (was streng genommen nötig wäre), sondern bezeichnen ihn mit demselben Symbol f wie die Funktion selbst.
Diese graphische Darstellung können wir als eine Art kontinuierliche Wertetabelle ansehen, weil wir ja eigentlich für *alle* zulässigen x-Werte die zugehörigen Funktionswerte auftragen und nicht nur für einige wenige Stützstellen, wie z.B. bei den Wertetabellen obigen Beispiels. Praktisch bestimmen wir allerdings ebenfalls nur einige wenige Kurvenpunkte und verbinden sie, im Vertrauen darauf, daß die Funktion genügend glatt ist, durch eine Linie ohne Knicke, die den Kurvenverlauf möglichst gut zu erraten versucht. Die Differenzierbarkeit einer Funktion, die wir in Abschnitt I.3 kennenlernen werden, liefert normalerweise eine gute Gewähr dafür, daß eine Funktion ausreichend glatt ist, um nach dem geschilderten graphischen Verfahren veranschaulicht werden zu können. Das bedeutet aber nicht, daß damit immer auch schon ein vollständiges Verständnis einer Funktion erlangt werden kann. Man muß eine Funktion normalerweise noch sorgfältig untersuchen, um etwa lokale Maxima oder Minima, Wendepunkte etc. aufzufinden. Die Differentialrechnung wird uns dafür ein leistungsfähiges Werkzeug an die Hand geben.

I.1.5 Operationen mit Funktionen Aus Funktionen $f, g, h, \ldots$ lassen sich neue Funktionen gewinnen. Uns stehen dafür im wesentlichen dieselben Grundrechenarten zur Verfügung, wie für gewöhnliche Zahlen. Die Summe $f+g$ zweier Funktionen f und g definieren wir dabei einfach durch die Vorschrift, daß der Funktionswert $(f+g)(x)$ der Summe als Summe $f(x)+g(x)$ der Funktionswerte $f(x)$ und $g(x)$ zu bilden ist. Genauso verfahren wir bei Subtraktion, Multiplikation und Division. Darüberhinaus können wir zwei Funktionen f und g ineinander einsetzen – verketten –, d.h., der Funktionswert $g(x)$ wird der Funktion f als Argument zugewiesen: $f(g(x))$ – vorausgesetzt, $g(x)$ liegt im Definitionsbereich D_f von f. Im einzelnen gilt für die x-Werte, die sowohl in D_f als auch in D_g, die also im sog. *Durchschnitt* $D_f \cap D_g$ von D_f und D_g liegen, bzw., bei der Verkettung, für die $g(x) \in D_f$

gilt:

Addition	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	**Division**	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
Subtraktion	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	**Potenzierung**	$f^a(x) = (f(x))^a$
Multiplikation	$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$ $(t\cdot g)(x) = t\cdot g(x),\ t\in\mathbb{R}$	**Verkettung**	$(f\circ g)(x) = f\,(g(x))$

$\boxed{\text{B}}$ Verkettung, oder Hintereinanderausführung $f\circ g$ zweier Funktionen f und g:

$f(x) = x^3$, $D_f = \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^2-1$, $D_g = \mathbb{R}$, $W_f = [-1,\infty)$ (überprüfen!) Dann ist $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x^2-1) = (2x^2-1)^3$ und $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$.

$f(x) = \frac{1}{x^3}$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $g(x) = x^2-4$, $D_g = \mathbb{R}$, $W_g = [-4,\infty)$ ist nicht vollständig in D_f enthalten, denn die Zahl 0 liegt in W_g, die für f verboten ist. 0 wird von $g(x)$ an den beiden Stellen -2 und 2 angenommen. Also ist $D_{f\circ g} = \mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$ und $(f\circ g)(x) = f(x^2-4) = \frac{1}{(x^2-4)^3}$.

$f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = \mathbb{R}_0^+$, $g(x) = x^2-1$, $D_g = \mathbb{R}$, $W_g = [-1,\infty)$. Es muß $g(x)\geq 0$ gelten, damit $g(x)$ in f eingesetzt werden kann. Das ist für $x\leq -1$ oder für $x\geq 1$ der Fall (nachprüfen!), d.h., für $x\in(-\infty,-1]$ oder für $x\in[1,\infty)$. Also ist der Definitionsbereich $D_{f\circ g}$ von $f\circ g$ durch die Vereinigung $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ dieser beiden Intervalle gegeben. $(f\circ g)(x) = ?$

I.1.6 Einfache Verkettungen

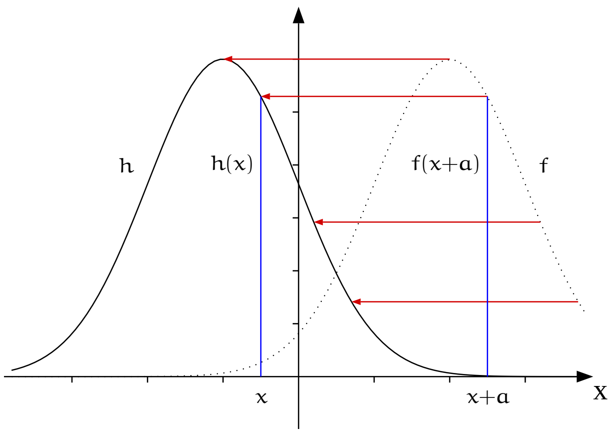


Abbildung I.2
Verschiebung in x-Richtung: $h(x) = f(x + a)$, $a > 0$

Eine Verschiebung einer Funktion f in x-Richtung erhalten wir, wenn wir sie mit der Funktion $g(x) = x + a$ verketten: $h(x) = f(x + a)$.

Für $a > 0$ wird die Funktion f um a Einheiten nach links geschoben, denn der Funktionswert $h(x)$ an der Stelle x wird mit der Vorschrift f an der a Einheiten weiter rechts liegenden Stelle $x + a$ gebildet. Auf diese Weise wandern alle Funktionswerte von f um a Einheiten nach links.

Für $a < 0$ wird die Funktion f nach rechts geschoben.

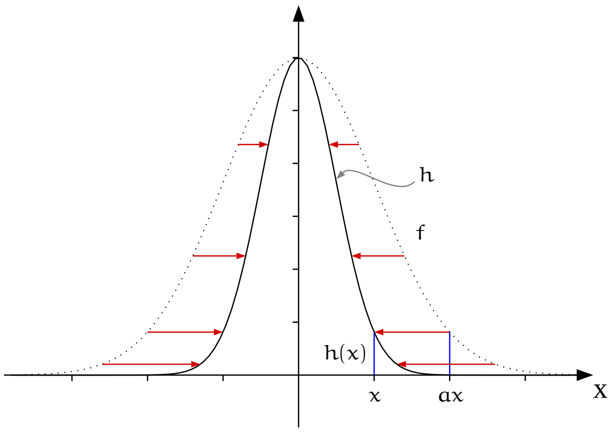


Abbildung I.3
Stauchung in x-Richtung: $h(x) = f(ax)$, $a > 1$

Eine Stauchung einer Funktion f in x-Richtung erhalten wir, wenn wir sie mit der Funktion $g(x) = ax$ verketten: $h(x) = f(ax)$.

Für $a > 1$ wird die Funktion f auf engerem Raum zusammengedrängt, denn der Funktionswert $h(x)$ an der Stelle x wird mit der Vorschrift f an der a-fach soweit entfernten Stelle ax gebildet. Auf diese Weise wandern weiter außen liegende Funktionswerte von f näher an den Ursprung heran.

Für $a < 1$ wird die Funktion f auf einen weiteren Raum gestreckt, denn der Funktionswert $h(x)$ an der Stelle x wird mit der Vorschrift f an der weiter innen liegenden Stelle ax gebildet.

I.2 Eine kleine Funktionssammlung

I.2.1 Geraden

$$f(x) = mx + c$$

$f(0) = c$ ist der y-Achsenabschnitt des Schnittpunktes von f mit der y-Achse.

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= m(x+1) + c - (mx + c) \\ &= mx + m + c - mx - c \\ &= m \end{aligned}$$

D.h., m ist der Zuwachs der Gerade in y-Richtung, wenn in x-Richtung eine Einheit fortgeschritten wird. m mißt also die Steilheit von f: Großes m bedeutet einen großen y-Zuwachs, kleines m einen kleinen Zuwachs bei gleichem Fortschritt in x-Richtung. Negatives m bedeutet, daß die Gerade fällt (z.B. g) und $m = 0$ gilt für waagrechte Geraden (z.B. h). m heißt daher *Steigung* der Gerade f. Sie läßt sich aufgrund des Strahlensatzes aus jedem sog. *Steigungsdreieck* als Verhältnis von y-Zuwachs $f(x+h) - f(x)$ zum x-Zuwachs $(x+h) - x = h$ bestimmen:

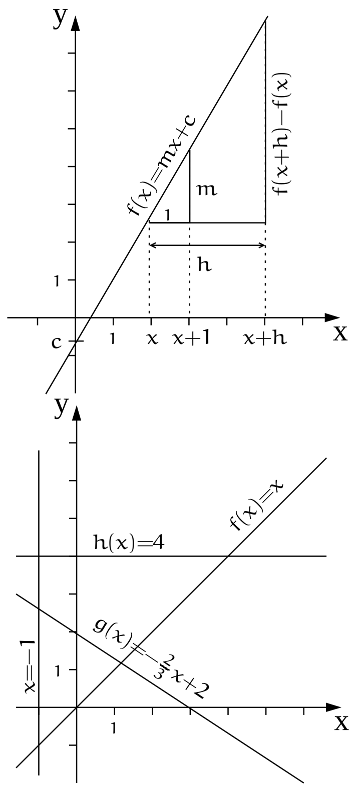


Abbildung I.4
(a) Gerade mit Steigungsdreiecken
(b) Beispiele

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{1}{h}\big(mx + mh + c - mx - c\big) \\ &= \frac{1}{h}\, mh = m \end{aligned}$$

Die senkrechten Geraden sind die einzigen, denen im x, y-Koordinatensystem keine Steigung zugeordnet werden kann. Sie haben die Gleichung $x = d$. So meint z.B. $x = -1$ die Menge aller Punkte $(-1, y)$ mit beliebigen $y \in \mathbb{R}$, also die Parallele zur y-Achse, die die x-Achse an der Stelle -1 schneidet.

I.2.2 Parabeln

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Eine Parabel ist spiegelsymmetrisch zu ihrem Scheitelpunkt S. Die Nullstellenbestimmung führt auf die *quadratische Gleichung*: $ax^2+bx+c=0$. Wir lösen sie durch *quadratische Ergänzung*: Dazu ergänzen wir die linke Seite von

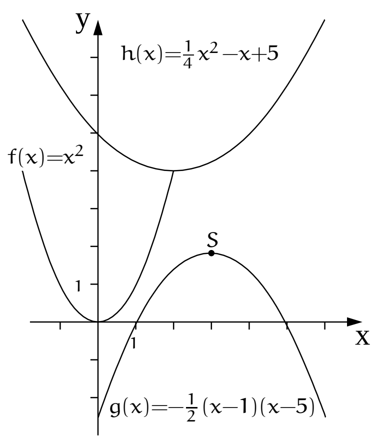


Abbildung I.5
Parabeln

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

zu einem Binomen $(x+p)^2 = x^2 + 2px + p^2$:

$$\begin{aligned} x^2 + 2\,\frac{b}{2a}\,x \qquad\qquad &= -\frac{c}{a} \\ x^2 + 2\quad p\quad x + \quad p^2 & \\ x^2 + 2\,\frac{b}{2a}\,x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\,, \end{aligned}$$

also

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}\,.$$

Falls die rechte Seite größer oder gleich Null ist, erhalten wir daraus durch Wurzelziehen

$$x_{1/2} + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$$

(beachte: $\sqrt{a^2} = |a|$!). Da sich $2|a|$ von $2a$ allenfalls durch das Vorzeichen unterscheidet, können wir auf der rechten Seite im Nenner $2a$ schreiben und ein eventuell vorhandenes Vorzeichen mit dem $\pm$ des Zählers verrechnen. Auf diese Weise erhalten wir die bekannte Lösungsformel für quadratische Gleichungen (die sog. *Mitternachtsformel*):

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{I.1}$$

I.2.3 Parabeln dritter Ordnung

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Die Nullstellenbestimmung stellt normalerweise ein Problem dar. Es gibt zwar eine Auflösungsformel (die sog. *Cardanische* Formel), doch ist sie für unsere Zwecke zu kompliziert anzuwenden (vor allem, weil man für ihren Gebrauch etwas von komplexen Zahlen verstehen sollte). Allerdings gibt es eine Situation, in der wir mit unseren Mitteln alle Nullstellen bestimmen können. Immer dann, wenn wir eine Nullstelle x_1 bereits kennen, z.B. indem wir sie geraten haben (was leider nicht immer gehen muß), läßt sich das Problem durch *Polynomdivision* von f mit $(x - x_1)$ auf eine quadratische Gleichung zurückführen. Um *ganzzahlige* Nullstellen zu raten (und etwas anderes wird man normalerweise gar nicht erst versuchen), gibt es eine wichtige Regel:

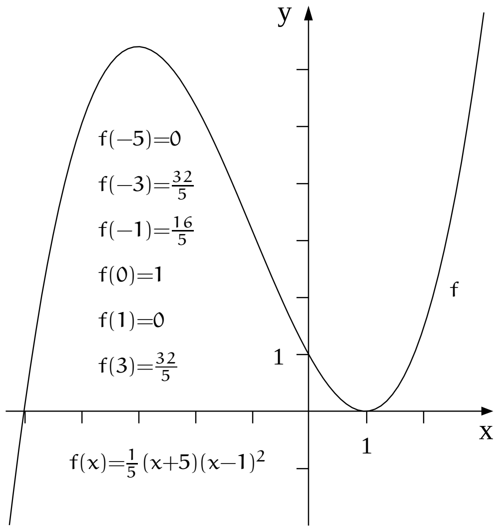


Abbildung I.6
Kubische Parabel

Falls die Koeffizienten a, b, c und d in der Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ alle ganzzahlig sind, muß eine ganzzahlige Lösung x_1 immer ein Teiler von d sein.

Das läßt sich leicht folgendermaßen einsehen: Aus $ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = 0$, also $d = -x_1(ax_1^2 + bx_1 + c)$ folgt, daß d das Produkt aus der (laut Annahme) ganzen Zahl $-x_1$ und dem Ausdruck $ax_1^2 + bx_1 + c$ ist. Letzterer ist aber, da er durch Multiplikation und Addition ganzer Zahlen entsteht, ebenfalls ganzzahlig. Also liefert $\frac{d}{x_1}$ eine ganze Zahl (nämlich $-(ax_1^2 + bx_1 + c)$).

Offensichtlich hängen diese Überlungen nicht davon ab, daß es sich um eine Gleichung dritten Grades handelt. Die Regel läßt sich natürlich auch für Gleichungen vierten, fünften und höheren Grades aussprechen.

Praktisch bedeutet das, wenn die beschriebenen Voraussetzungen für die Gleichung $f(x) = 0$ (eventuell nach Multiplikation mit einem geeigneten Faktor) erfüllt sind, daß wir nur die möglichen Teiler von d zu bestimmen und in $f(x)$ einzusetzen haben. Liefert einer den Wert Null, dann haben wir eine Nullstelle gefunden, andernfalls gibt es keine ganzzahlige Nullstelle.

$\boxed{\text{B}}$ Wir betrachten $f(x) = \frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{5}x^2 - \frac{9}{5}x + 1$. Die Nullstellen müssen wir aus

$$\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{5}x^2 - \frac{9}{5}x + 1 = 0$$

bestimmen. Um unsere Rate-Voraussetzungen zu erfüllen, müssen wir diese Gleichung in eine äquivalente Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten überführen, was hier leicht durch Multiplikation mit 5 zu bewerkstelligen ist:

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0\,. \tag{I.2}$$

Mögliche Teiler von 5 sind ± 1 und ± 5 (denn 5 ist ja eine Primzahl). Durch Einsetzen sieht man schnell, daß $x_1 = 1$ eine Lösung darstellt. Die Polynomdivision von x^3+3x^2-9x+5 mit $x-1$ stellt eine Methode dar, um $x-1$ als Faktor aus x^3+3x^2-9x+5 auszuklammern. x^3+3x^2-9x+5 muß sich also als Produkt aus einem quadratischen Term $p(x)$ und $(x-1)$ schreiben lassen:

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = p(x) \cdot (x-1)\,,$$

oder

$$(x^3 + 3x^2 - 9x + 5) : (x-1) = p(x)\,.$$

Erster Schritt: Bestimme den Ausdruck, mit dem der führende Term x (d.h., der mit der höchsten Potenz) des Teilers $(x-1)$ multipliziert werden muß, um im Ergebnis denselben führenden Term x^3 wie in $x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ zu erhalten. Offensichtlich ist das x^2. Nun wird $x-1$ mit x^2 multipliziert und von $x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ abgezogen. Dabei fällt natürlich x^3 weg (denn so haben wir es ja gerade eingerichtet!):

$$\begin{array}{rl}
(x^3 + 3x^2 - 9x + 5) : (x-1) = x^2 \\
-\underline{(x^3 - \;\; x^2)\qquad\qquad} \\
4x^2 - 9x + 5 \qquad\qquad\qquad
\end{array}$$

Zweiter Schritt: Wir verfahren wie beim ersten Schritt, nun aber mit dem Ausdruck $4x^2 - 9x + 1$. Wir müssen $(x-1)$ mit $4x$ multiplizieren, um den führenden Term $4x^2$ zu reproduzieren. Im dritten und letzten Schritt ist der Faktor -5:

$$\begin{array}{rl}
(x^3 + 3x^2 - 9x + 5) : (x-1) = x^2 + 4x - 5 \\
-\underline{(x^3 - \;\; x^2)\qquad\qquad} \\
4x^2 - 9x + 5 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \\
-\underline{(4x^2 - 4x)\;\;\;} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \\
-5x + 5 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \\
-\underline{(-5x + 5)} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \\
0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad
\end{array}$$

Als Ergebnis erhalten wir $p(x) = x^2+4x-5$, also $x^3+3x^2-9x+5 = (x^2+4x-5)(x-1)$. Statt (I.2) können wir nun

$$(x^2 + 4x - 5)(x-1) = 0$$

setzen. Um die weiteren Nullstellen zu gewinnen, von denen es noch maximal zwei geben kann (aber nicht muß), brauchen wir nun nur noch die quadratische Gleichung

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

zu lösen. Die Mitternachtsformel (I.1) liefert $x_2 = 1 = x_1$ und $x_3 = -5$. $x_1 = 1$ ist eine sog. *doppelte Nullstelle*. Damit hat es folgende Bewandtnis:

Die beiden Faktoren $(x-1)$ und $(x+5)$ müssen x^2+4x-5 ohne Rest teilen – genau wie oben mit der kubischen Gleichung beschrieben. Nach Division von x^2+4x-5 mit $(x-1)$ kann die höchste Potenz des Ergebnisses nur noch x^1 sein und nach anschließender Division mit $(x+5)$ nur noch x^0, d.h., das Divisionsergebnis besteht nur noch aus einer Zahl s. Somit muß $x^2+4x-5 = s(x-1)(x+5)$ gelten. Offensichtlich ist $s = 1$ (ausmultiplizieren). Wir erhalten $x^3+3x^2-9x+5 = (x+5)(x-1)(x-1) = (x+5)(x-1)^2$. Die linke Seite ist nach (I.2) $5 \cdot f(x)$, so daß wir jetzt bei der Darstellung

$$f(x) = \frac{1}{5}(x+5)(x-1)^2$$

für f angelangt sind. Nun sehen wir leicht, was damit gemeint ist, daß es sich bei $x_1 = 1$ um eine doppelte Nullstelle handelt: Der Faktor $(x-1)$ taucht im Gegensatz zum Faktor $(x+5)$ *quadratisch* auf. Das hat zur Folge, daß f bei $x = 1$ eine Nullstelle *ohne* Vorzeichenwechsel besitzt (bei $x = -5$ findet dagegen ein Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ statt).

Eine doppelte Nullstelle x_1 ist dadurch gekennzeichnet, daß der Faktor $(x-x_1)$ quadratisch in f auftritt.

I.2.4 Hyperbel

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

In der Definitionslücke $x = 0$ hat f eine senkrechte Asymptote, nämlich die y-Achse. Das können wir leicht einsehen, wenn wir Zahlen einsetzen, die sehr nahe bei 0 liegen:

$$f(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2,\ f(\tfrac{1}{4}) = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4,\ f(\tfrac{1}{10}) = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10,$$
$$f(\tfrac{1}{100}) = \frac{1}{\frac{1}{100}} = 100,\ f(\tfrac{1}{1000}) = \frac{1}{\frac{1}{1000}} = 1000, \ldots$$

Auf der kleinen Strecke zwischen 0 und 1 ergeben sich, indem wir uns mit x der Zahl 0 immer weiter nähern, beliebig große Funktionswerte $f(x)$. Das bedeutet aber gerade, daß sich der Graph der Funktion immer besser an die y-Achse anschmiegt, d.h., daß die y-Achse eine Asymptote ist. Setzen wir dagegen x-Werte mit immer größerem Betrag ein, so streben die Funktionswerte gegen 0:

$$f(\pm 10) = \pm\tfrac{1}{10},\ f(\pm 100000) = \pm\frac{1}{100000} = \pm 0,00001, \ldots$$

Der Graph von f schmiegt sich nun also an die x-Achse, d.h., die x-Achse ist eine waagrechte Asymptote von f. Offensichtlich ist f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung: $f(-x) = -f(x)$ gilt für alle $x \in D_f$.

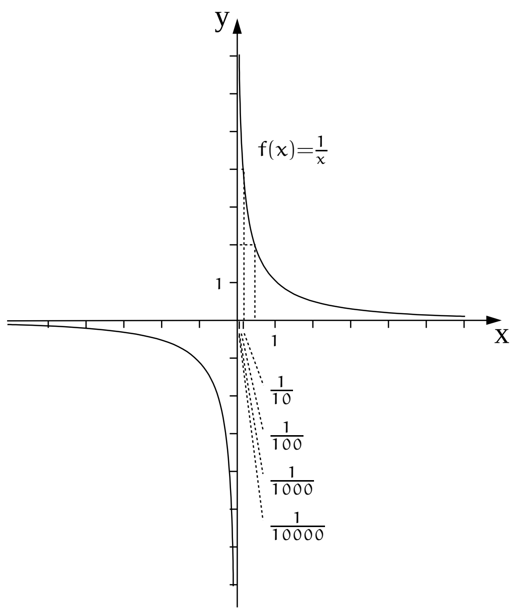


Abbildung I.7
Hyperbel

I.2.5 Trigonometrische Funktionen

Die Verhältnisse zweier Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck sind nicht von dem Maßstab abhängig, in dem es gezeichnet wird.

$$\sin(x) = \frac{b}{c} \qquad \cos(x) = \frac{a}{c}$$

$$\tan(x) = \frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cot(x) = \frac{a}{b}$$

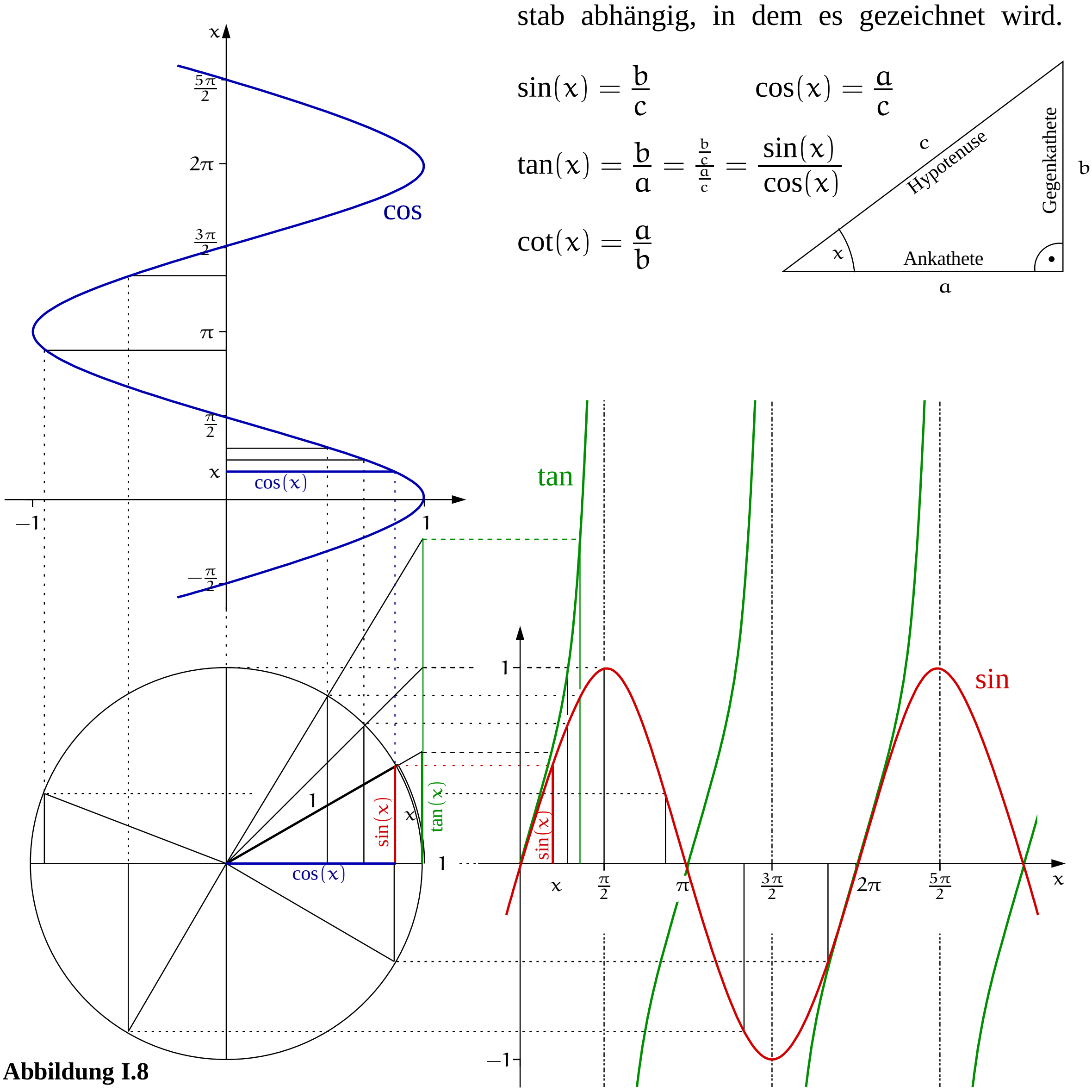


Abbildung I.8

Entstehung von sin, cos *und* tan *am Einheitskreis*

Solche Seitenverhältnisse werden demnach von dem Winkel x bereits eindeutig festgelegt. Für jedes der vier möglichen hat sich ein Name eingebürgert. So bezeichnen wir mit $\sin(x)$ das Verhältnis $\frac{b}{c}$ aus Gegenkathete b und Hypotenuse c, bei gegebenem Winkel x. Auf diese Weise haben wir eine Funktionsvorschrift erklärt, die zunächst nur jedem Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ ($\widehat{=} 90°$) das Verhältnis der Seiten b und c zuordnet (zur Erinnerung an das Bogenmaß siehe Abschnitt I.2.8). Wir erweitern sie, indem wir Winkel, die größer als $\frac{\pi}{2}$ sind, den y-Wert des zugehörigen Fahrstrahls auf dem Einheitskreis zuordnen (vergl.

Abbildung I.8). Die so gebildete Funktion nennen wir *Sinus* und bezeichnen sie mit sin. Genauso führen wir den *Cosinus* cos, den *Tangens* tan und den *Cotangens* cot ein. Aus der Zeichnung erkennen wir, daß der Tangens bei allen ganzzahligen Vielfachen von π eine Definitionslücke hat und dort jeweils eine senkrechte Asymptote besitzt. Dasselbe gilt für den Cotangens bei allen ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ (in Abbildung I.8 der Übersichtlichkeit halber, aber auch, weil er nur der Kehrwert des Tangens ist, nicht mit eingezeichnet).

Aus Abbildung I.8 lesen wir noch den zentralen Zusammenhang zwischen sin und cos ab. Nach dem Satz von Pythagoras gilt

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1\,. \tag{I.3}$$

Darüberhinaus lassen sich die folgenden Symmetrieeigenschaften erkennen:

$$\sin(-x) = -\sin(x)\,, \tag{I.4}$$
$$\cos(-x) = \cos(x) \tag{I.5}$$

und damit

$$\tan(-x) = -\tan(x)\,, \tag{I.6}$$
$$\cot(-x) = -\cot(x)\,. \tag{I.7}$$

Allgemein bedeutet $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D_f$ für eine Funktion f, daß sie *punktsymmetrisch zum Ursprung* und $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D_f$, daß sie *achsensymmetrisch zur y-Achse* ist.

Also sind sin, tan und cot punktsymmetrisch zum Ursprung. cos ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

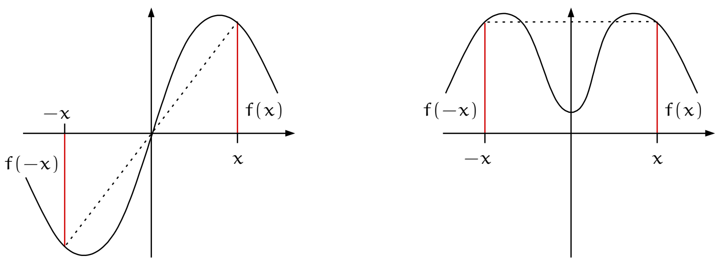


Abbildung I.9 *Punktsymmetrie und Achsensymmetrie*

I.2.6 Die Additionssätze der trigonometrischen Funktionen

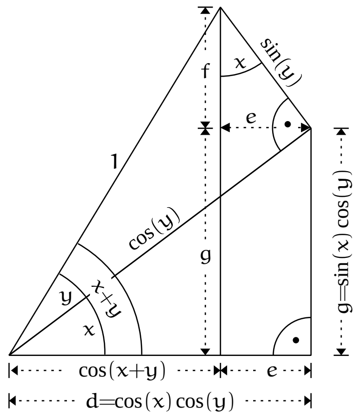


Abbildung I.10
$\sin(x+y)$, $\cos(x+y)$

Aus der Zeichnung lesen wir folgendes ab:

$$\sin(x+y) = g + f, \qquad \cos(x+y) = d - e,$$

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \frac{d}{\cos(y)}, &&\text{also} && d = \cos(x)\cos(y),\\
\sin(x) &= \frac{e}{\sin(y)}, &&\text{also} && e = \sin(x)\sin(y),\\
\cos(x) &= \frac{f}{\sin(y)}, &&\text{also} && f = \cos(x)\sin(y),\\
\sin(x) &= \frac{g}{\cos(y)}, &&\text{also} && g = \sin(x)\cos(y).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Additionssätze für den Sinus und den Cosinus:

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)\,, \tag{I.8}$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\,. \tag{I.9}$$

Mit ihrer Hilfe können wir nun auch den Additionssatz für den Tangens herleiten:

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)}\,.$$

Erweitern mit $\frac{1}{\cos(x)\cos(y)}$ ergibt:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)} \cdot \frac{\frac{1}{\cos(x)\cos(y)}}{\frac{1}{\cos(x)\cos(y)}} = \frac{\frac{\sin(x)\cos(y)}{\cos(x)\cos(y)} + \frac{\cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}}{\frac{\cos(x)\cos(y)}{\cos(x)\cos(y)} - \frac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}}\\
&= \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}\,,
\end{aligned}$$

also

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}\,. \tag{I.10}$$

I.2.7 Zwei wichtige Grenzwerte Um später den Sinus und den Cosinus ableiten zu können, benötigen wir die Grenzwerte $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ und $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$. Dazu bestimmen wir aus nebenstehender Skizze folgende Flächeninhalte: Das Dreieck PST mit den beiden Katheten der Länge $\sin(x)$ und $\cos(x)$ hat den Flächeninhalt $A_1 = \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)$ und das Dreieck PQR mit den Katheten der Länge 1 und $\tan(x)$ besitzt die Fläche $A_2 = \frac{1}{2}\tan(x)$. Die Fläche A des Kreissektors PQT mit der Bogenlänge x ist nach Gleichung (I.15) (für $r = 1$): $A = \frac{1}{2}x$. An der nebenstehenden Zeichnung erkennen wir, daß die Fläche A_1 immer kleiner als die Sektorfläche A ist, und daß diese von A_2 übertroffen wird: $A_1 \le A \le A_2$. Das bedeutet also

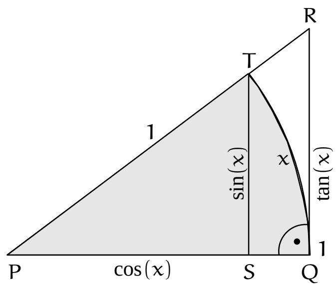


Abbildung I.11
Abschätzung zum Bogenmaß x

$$\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) \le \frac{1}{2}x \le \frac{1}{2}\tan(x) = \frac{1}{2}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,.$$

Daraus erhalten wir nach Division mit $\frac{1}{2}\sin(x)$:

$$\cos(x) \le \frac{x}{\sin(x)} \le \frac{1}{\cos(x)}\,. \tag{I.11}$$

Der Cosinus hat an der Stelle $x = 0$ den Wert 1 (vergl. Abbildung I.8). Da er stetig ist, strebt $\cos(x)$ gegen 1, wenn x gegen 0 strebt. Die linke und rechte Seite in (I.11) strebt also jeweils gegen 1, und deshalb muß auch der mittlere Ausdruck gegen 1 wandern ("*Sandwich-Prinzip*"). Dasselbe passiert dann mit dem Kehrwert $\frac{\sin(x)}{x}$. Wir erhalten als Ergebnis:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1\,. \tag{I.12}$$

Damit können wir den zweiten Grenzwert leicht bestimmen:

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos(x)}{x} &= \frac{1-\cos(x)}{x}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\\ &= \frac{1-\cos^2(x)}{x\,(1+\cos(x))} = \frac{\sin^2(x)}{x\,(1+\cos(x))}\\ &= \sin(x)\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}\cdot\frac{\sin(x)}{x}\,.\end{aligned}$$

Der letzte Faktor strebt gegen 1, wie wir oben gesehen haben, der zweite gegen $\frac{1}{2}$ und der erste gegen 0 (denn $\sin(0) = 0$). Das Produkt dieser drei Faktoren strebt also gegen 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0\,. \tag{I.13}$$

I.2.8 Erinnerung an das Bogenmaß

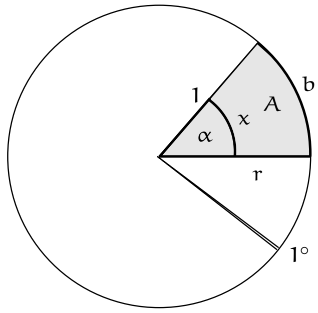


Abbildung I.12
Zum Bogenmaß

Wir stellen hier noch einmal den Zusammenhang her, zwischen den beiden gängigen Methoden einen Winkel zu messen. Die geläufigste besteht darin, den Einheitskreis in 360 gleich große Kreissektoren aufzuteilen. Ein solcher Sektor repräsentiert den Winkel von einem *Grad*, 1°. Dieser wird in 60 gleich große Teile unterteilt, die eine *Winkel-Minute* darstellen, $1'$, die sich wiederum aus 60 gleich großen Sektoren zusammensetzt, die jeweils eine *Winkel-Sekunde*, $1''$, definieren. Auf den meisten Taschenrechnern ist diese Winkelmessung voreingestellt (erkennbar an der Anzeige DEG, für *Degree*). Für mathematische Untersuchungen ist es zweckmäßiger, den Winkel mit dem sog. *Bogenmaß* zu beschreiben. Hier wird der Winkel durch die Länge des Bogens x auf einem Kreis mit Radius 1 gemessen (bei Taschenrechnern üblicherweise durch RAD (für *Radian*) gekennzeichnet). Wir stellen, wenn wir nun schon mal dabei sind, den Zusammenhang zwischen Bogenlänge b und zugehörigem Winkel α gleich für einen beliebigen Radius r her. Das Bogenmaß erhalten wir dann einfach, indem wir $r = 1$ setzen.
Der Zusammenhang von b und α ist denkbar einfach: b ist proportional zu α, d.h., doppelter, halber etc. Winkel α führt zu doppelter bzw. halber Bogenlänge b des zugehörigen Kreissektors. Zum Vollwinkel $\alpha = 360^\circ$ gehört offensichtlich die Bogenlänge des gesamten Kreisumfangs, also $b = 2\pi r$. Aufgrund der Proportionalität zwischen α und b folgt nun

$$\frac{b}{2\pi r} = \frac{\alpha}{360}, \qquad \text{oder} \qquad b = \frac{\alpha}{180}\pi r\,.$$

Für $r = 1$ erhalten wir den gewünschten Zusammenhang zwischen dem Bogenmaß x und dem Winkel α:

$$x = \frac{\alpha}{180}\pi\,. \tag{I.14}$$

Offensichtlich gilt $b = x \cdot r$. Genauso einfach können wir nun auch noch den Zusammenhang zwischen der Sektorfläche A und dem zugehörigen Bogenmaß x finden: A ist proportional zu b. Zum Bogen $2\pi r$, dem Umfang des Vollkreises, gehört die Fläche πr^2 der vollen Kreisscheibe. Also verhält sich der Bogen b zum Gesamtumfang, wie die Fläche A zum Gesamtflächeninhalt:

$$\frac{b}{2\pi r} = \frac{A}{\pi r^2},$$

woraus wir sofort

$$A = \frac{1}{2}\,b\,r = \frac{1}{2}\,x\,r^2 \tag{I.15}$$

erhalten.

I.2.9 Die e-Funktion Die Eulersche Zahl e ist durch den Grenzwert

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}7182818\ldots \qquad \text{(I.16)}$$

gegeben. Da wir Grenzwerte eher intuitiv verwenden wollen, können wir nicht in die etwas aufwendige Untersuchung dieser Zahl einsteigen. Wir definieren die *Exponentialfunktion*, oft durch exp bezeichnet, als die Potenzfunktion mit der Basis e:

$$\exp : x \mapsto e^x\,, \qquad D_{\exp} = \mathbb{R}\,.$$

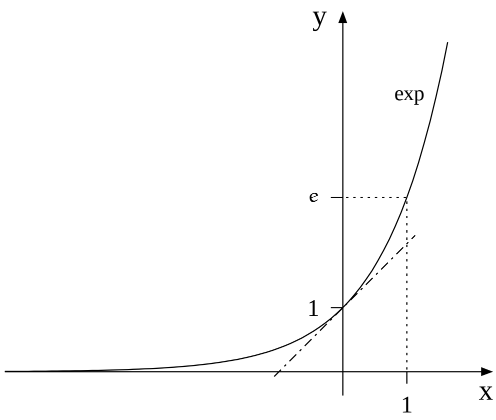


Abbildung I.13 *Die* e*-Funktion*

Neben exp werden wir auch die Bezeichnung e-*Funktion* verwenden. Von entscheidender Bedeutung (und nur für die Potenzfunktion mit dieser seltsamen Basis e erfüllt) wird die scheinbar nebensächliche Tatsache sein, daß die Tangente im Punkt $(0|1)$ die Steigung 1 besitzt. Das können wir hier nicht beweisen, sondern müssen es als gegeben annehmen. Diese Eigenschaft ist der eigentliche Grund dafür, daß die e-Funktion ihre eigene Ableitung ist. In Abschnitt I.3.11 werden wir einen Hinweis darauf geben, warum die Zahl mit den beschriebenen Eigenschaften gerade durch (I.16) gegeben ist.

Weitere Eigenschaften der e-Funktion:

(a) Sie ist streng monoton wachsend, d.h., für $x_2 > x_1$ gilt $\exp(x_2) > \exp(x_1)$ oder $e^{x_2} > e^{x_1}$: der größere von zwei x-Werten liefert auch den größeren Funktionswert.

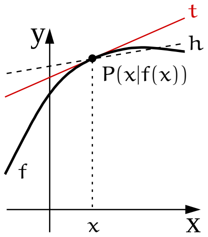
(b) Die e-Funktion besitzt keine Nullstellen. $\exp(x) = e^x > 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

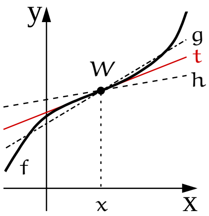
(c) Die Rechenregeln des Potenzierens bedeuten für die e-Funktion:
$e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}\,, \quad e^{x_1-x_2} = \dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}}$ und $\left(e^x\right)^a = e^{ax}$.

Zur Erinnerung: Die Potenzrechengesetze lauten (für $a, b > 0\,, x, y \in \mathbb{R}$):
$a^x a^y = a^{x+y}\,, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}\,, \quad (a^x)^y = a^{xy};$
$(ab)^x = a^x b^x\,, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}\,, \quad a^0 = 1\,.$

I.3 Die Ableitung

I.3.1 Das Tangentenproblem





An eine Funktion f *soll in einem gegebenen Kurvenpunkt* P *eine Tangente angelegt werden.*

Um einer Lösung dieses Problems näherzukommen, müssen wir zunächst einmal klären, was wir überhaupt unter einer Tangente verstehen wollen. Eine gängige Vorstellung besteht darin, von einer Tangente zu verlangen, daß sie die Kurve im Kurvenpunkt $P(x|f(x))$ nur berührt, aber nicht schneidet. Diese Vorstellung wird noch dadurch gestützt, daß sie für die meisten Kurvenpunkte P auch tatsächlich zutrifft.

Aber wie steht es etwa mit einem Wendepunkt W der Kurve, also einem Punkt, in dem sie z.B. von einer Rechtskurve in eine Linkskurve übergeht? Hier wird *jede* Gerade durch W die Kurve in W schneiden. Trotzdem wird vermutlich jeder, der unter den Geraden g, h und t zu wählen hat, zu dem Schluß gelangen, daß als Tangente wohl nur t in Frage kommt. Das liegt daran, daß t die Kurve in einer kleinen Umgebung des Kurvenpunktes W besser annähert, als die anderen Geraden. Für Kurvenpunkte P, die nicht gerade Wendepunkte sind, hat die Gerade, die die Kurve besser als andere Geraden annähert, normalerweise auch die Eigenschaft, die Kurve nur zu berühren und nicht zu schneiden. Aber diese Eigenschaft ist, wie unsere Überlegungen nahelegen, eben nur zweitrangig. Im Vordergrund steht die Forderung, *daß eine Tangente die Kurve in einer Umgebung des Punktes besser als alle anderen Geraden annähert.*
Damit meinen wir, daß der Unterschied der y-Werte von Kurve und Tangente in einer Umgebung rechts und links des Kurvenpunktes kleiner ist, als der Unterschied zwischen Kurve und jeder anderen Geraden durch diesen Punkt. Damit kann es in einem Kurvenpunkt nur eine Tangente geben – vorausgesetzt, es gibt überhaupt eine.

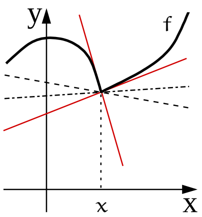


Abbildung I.14
Stetige Funktion mit Knick

Man mache sich klar, daß es z.B. für einen Punkt, in dem die Kurve einen Knick hat, keine Gerade geben kann, die unsere Anforderungen an eine Tangente erfüllt. Die strenge Forderung nach bester Annäherung an die Kurve führt also dazu, daß es Kurvenpunkte geben kann, in denen keine Tangente möglich ist, obwohl es eventuell viele Geraden gibt, die die Funktion in diesen Punkten nur berühren. Tatsächlich ist das aber kein Fehler unserer Tangentendefinition! Normalerweise sind wir nämlich weniger an der Tangente selbst interessiert, als vielmehr an ihrer *Steigung*. Durch sie gewinnen wir ein Maß für die "Steilheit" der Kurve an der betreffenden Stelle. Für Kurvenpunkte, an denen wir keine Tangente (in unserem strengen Sinn) anlegen können, wie etwa bei Knickstellen, macht es dann eben keinen Sinn, von der Steilheit der Kurve sprechen zu wollen.

I.3.2 Vom Differenzenquotient zur Ableitung Um die Steigung der Tangente t in $P(x|f(x))$ zu erklären, bestimmen wir zunächst einmal die Steigung der Sekante s durch P und einen weiteren Kurvenpunkt $Q(x+h|f(x+h))$, der von P verschieden ist ($h \neq 0$). Sie ist durch das Verhältnis der Kathetenlängen im Steigungsdreieck von s gegeben, also durch das Verhältnis des Zuwachses $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ der Funktionswerte zum Zuwachs $\Delta x = h$ der zugehörigen x-Koordinaten:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{(I.17)}$$

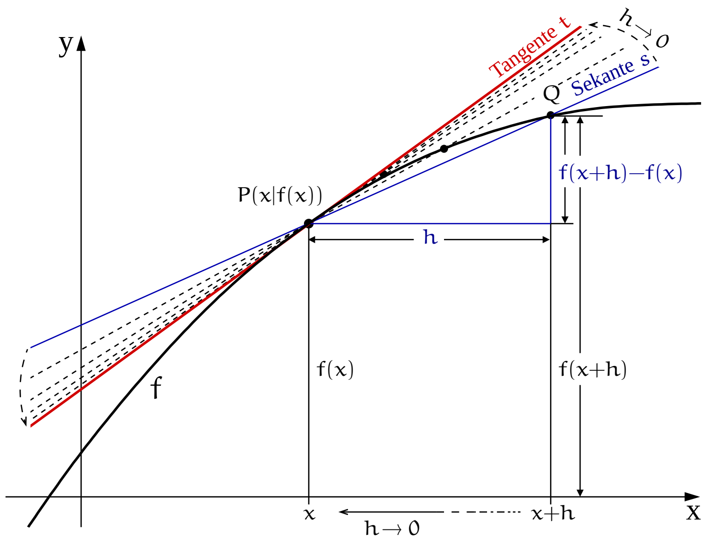


Abbildung I.15 *Von der Sekante zur Tangente*

Dieser Ausdruck wird als *Differenzenquotient* bezeichnet, da er der Quotient aus der Differenz der Funktionswerte von f und der Differenz $h = (x+h) - x$ der zugehörigen x-Werte $x+h$ und x ist. Er ist als Näherung für die Tangentensteigung anzusehen, die wir zu finden hoffen. Diese Näherung ist normalerweise um so besser, je dichter die zweite Stelle $x+h$ bei der eigentlich interessierenden Stelle x liegt, d.h., je kleiner h ist. Lassen wir h gegen 0 streben, so wird Q gegen P streben – vorausgesetzt, die Funktion f ist an der Stelle x stetig. Wir sehen also, daß die Stetigkeit von f in x eine Mindestvoraussetzung darstellt, um überhaupt eine Tangentensteigung über eine Annäherung durch Sekantensteigungen einführen zu können. Es sei auch gleich betont, daß es sich bei der Stetigkeit wirklich nur um eine *notwendige Bedingung* handelt, die keineswegs ausreichend sein muß, um die Tangentensteigung angeben zu können: Man denke nur an stetige Funktionen mit Knickstellen (vergl. Abbildung I.14).

Wenn der Differenzenquotient (I.17) für beliebig klein werdendes h eine feste Zahl immer genauer annähert, sich von ihr also *beliebig wenig* unterscheidet, so können wir diese Zahl mit Fug und Recht als die Steigung der Tangente t in $P(x|f(x))$ ansehen. Sie ist also durch einen Grenzwert, der diese Annäherungsprozedur beschreibt, gegeben:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{(I.18)}$$

Um zum Ausdruck zu bringen, daß es sich dabei um die Steigung der Tangente der Funktion f an der Stelle x handelt, bezeichnen wir diese Zahl mit $f'(x)$. Auf diese Weise haben wir für jedes x aus dem Definitionsbereich von f, für das der Grenzwert existiert, eine Vorschrift f' angegeben, die wir *Ableitung* von f nennen:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \, . \qquad \text{(I.19)}$$

Eine Funktion f heißt an der Stelle $x \in D_f$ *differenzierbar*, falls der Grenzwert (I.19) existiert. Eine Funktion heißt *differenzierbar*, falls sie für alle Werte x aus ihrem Definitionsbereich differenzierbar ist.

I.3.3 Notation Neben $f'(x)$ gibt es auch noch die Schreibweise $\frac{df(x)}{dx}$, oder $\frac{d}{dx}f(x)$, die an die Herkunft als Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ für $(h =)\ \Delta x \to 0$ erinnern soll. $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ heißt daher auch *Differentialquotient* von f an der Stelle x. Die sogenannten *Differentiale* $df(x)$ und dx sind dabei keine wirklichen mathematischen Objekte, denn $df(x)$ müßte einfach 0 sein, wenn wir versuchen sollten, diesen Ausdruck als Grenzwert von $\Delta f(x)$ für $\Delta x \to 0$ zu definieren. Sie sind nur als Symbole anzusehen.

I.3.4 Die Ableitung einer Geraden $f(x) = mx + c$ Wenn unsere Überlegungen zur Tangentensteigung bisher richtig waren, dann müßte die konstante Funktion $f'(x) = m$ die Ableitung von f sein, denn eine Gerade besitzt überall die gleiche Steigung m:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{m(x+h) + c - (mx + c)}{h} = \frac{mh}{h} = m\,.$$

Der Differenzenquotient hängt, wie erwartet, gar nicht mehr von h ab, so daß sich eine Grenzwertbildung erübrigt: $f'(x) = m$, wie es sein muß.

I.3.5 Die Ableitung der Parabel $f(x) = x^2$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{(2x+h)h}{h} = 2x + h\,.$$

Dieser Ausdruck strebt für $h \to 0$ offensichtlich beliebig genau gegen die Zahl $2x$, die daher den Grenzwert des Differenzenquotienten darstellt:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x\,,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

I.3.6 Die Ableitung der Parabel dritter Ordnung $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \frac{(3x^2 + 3xh + h^2)h}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2\,.\end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ strebt das gegen $3x^2$, wenn h gegen 0 strebt:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2\,.$$

I.3.7 Der allgemeine Fall $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ Hier stehen wir zunächst vor dem Problem, den Ausdruck $f(x+h) = (x+h)^n$ auszuwerten, d.h., wir müßten in der Lage sein, das allgemeine Binom $(x+h)^n$ auszumultiplizieren. Dafür gibt es zwar eine Formel, doch kommen wir ohne sie aus. Wenn wir die beiden letzten Fälle analysieren, dann fällt auf, daß sich der Summand mit der höchsten x-Potenz (also x^2 bzw. x^3) immer heraushebt. Alle anderen Summanden kommen mit mindestens einem h multipliziert vor. Dabei werden alle, außer der zweite Summand ($2xh$ bzw. $3x^2h$), mit h^2, h^3 oder noch höheren Potenzen von h multipliziert, so daß diese, nach Ausklammern und Kürzen des gemeinsamen Faktors h aller Summanden, mindestens noch mit h multipliziert bleiben. Den Grenzwert $h \to 0$ überlebt dann nur noch der zweite Summand, denn er kommt als einziger nicht mehr in Gesellschaft eines Faktors h vor. Wir versuchen nun, diese Beobachtung auf den allgemeinen Fall zu übertragen. Wenn wir uns $(x+h)^n = (x+h)(x+h)(x+h)\cdots(x+h)$ ausmultipliziert denken, also jeden Summanden der ersten Klammer mit jedem der zweiten multiplizieren, dann mit jedem der dritten usw., bis zur letzten, dann werden wir für die ersten Summanden des Ergebnisses den Ausdruck

$$x^n + nx^{n-1}h + ax^{n-2}h^2 + bx^{n-3}h^3 + cx^{n-4}h^4 + \cdots + h^n$$

mit den noch unbestimmten Koeffizienten a, b, c usw. erhalten. Dabei gibt es nur eine Möglichkeit x^n zu erhalten, weshalb der Vorfaktor von x^n auch 1 ist. Dagegen gibt es n Möglichkeiten, den Ausdruck $x^{n-1}h$ zu gewinnen: Wir multiplizieren $n-1$-mal x mit sich selbst und nur einmal mit h. Dafür gibt es die n Möglichkeiten $hx^{n-1} = xhx^{n-2} = x^2hx^{n-3} = \cdots = x^{n-2}hx = x^{n-1}h$. Also muß der Vorfaktor dieses Ausdrucks n sein. Wir könnten nun einige Arbeit dafür verwenden, auch noch die Koeffizienten a, b, c usw. zu bestimmen. Der Punkt ist aber, daß das gar nicht nötig ist. Bei der Grenzwertbildung werden die Summanden mit diesen Koeffizienten sowieso gegen 0 streben:

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&\qquad = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&\qquad = \frac{x^n + nx^{n-1}h + ax^{n-2}h^2 + bx^{n-3}h^3 + cx^{n-4}h^4 + \cdots + h^n - x^n}{h} \\
&\qquad = \frac{nx^{n-1}h + ax^{n-2}h^2 + bx^{n-3}h^3 + cx^{n-4}h^4 + \cdots + h^n}{h} \\
&\qquad = \frac{(nx^{n-1} + ax^{n-2}h + bx^{n-3}h^2 + cx^{n-4}h^3 + \cdots + h^{n-1})h}{h} \\
&\qquad = nx^{n-1} + ax^{n-2}h + bx^{n-3}h^2 + cx^{n-4}h^3 + \cdots + h^{n-1}\,.
\end{aligned}$$

Außer dem ersten Summanden nx^{n-1} haben alle anderen mindestens einen Faktor h und verschwinden daher im Grenzwert für $h \to 0$. Wir erhalten also für $f(x) = x^n$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}\,. \tag{I.20}$$

I.3.8 Die Ableitung der Hyperbel $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} = \frac{\frac{-h}{(x+h)x}}{h} = \frac{-1}{(x+h)x} \xrightarrow{h\to 0} -\frac{1}{x^2}\,.$$

Also gilt $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Versuchen wir die Bezeihung (I.20), nämlich $f'(x) = nx^{n-1}$ für $f(x) = x^n$, auch für $n = -1$ anzuwenden, d.h., auf die Funktion $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, so würden wir den Ausdruck $(-1)x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ erhalten, also genau das Ergebnis, daß wir eben für die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x}$ erzielt haben. Das bedeutet, daß nx^{n-1} zumindest auch noch für $n = -1$ die Ableitung von $f(x) = x^n$ ist. Das läßt hoffen, daß diese Beziehung sogar für alle negativen ganzen Zahlen gültig ist. Um sich davon zu überzeugen, könnte man als nächstes den Fall $n = -2$ untersuchen, also $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Wir müßten durch direktes Ausrechnen (so wie oben) als Ableitung $f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$ erhalten, also wieder das, was (I.20) für $n = -2$ voraussagen würde. $\boxed{\text{Ü}}$
Wir werden diesen Weg aber nicht weiterverfolgen, denn die Gültigkeit von (I.20) für alle ganzen Zahlen erhalten wir viel einfacher, wenn wir uns zunächst leistungsfähige Rechenregeln für die Ableitung beschaffen und diese auf das Problem anwenden. Es wird sich dabei herausstellen, daß nx^{n-1} für *alle* gebrochenen Hochzahlen n, tatsächlich sogar für *alle* Hochzahlen aus $\mathbb{R}$ die Ableitung von $f(x) = x^n$ ergibt (vergl. Seite 44).

I.3.9 Die Ableitung der Wurzel $f(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{x+h-x}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})h} = \frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &\xrightarrow{h\to 0} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.\end{aligned}$$

Man überzeuge sich davon, daß dieses Ergebnis ebenfalls aus (I.20) für $n = \frac{1}{2}$ entsteht ($x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$). Der Definitionsbereich von $f(x) = \sqrt{x}$ besteht aus allen positiven Zahlen einschließlich der Null, während die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ nur für alle positiven Zahlen (ohne die Null) existiert. Das liegt hier daran, daß die Tangente in $x = 0$ senkrecht ist und deshalb keine endliche Steigung besitzen kann.

I.3.10 Die Ableitung der trigonometrischen Funktionen Wir beginnen mit $f(x) = \sin(x)$. Um den Differenzenquotienten auswerten zu können, benötigen wir die Additionssätze der trigonometrischen Funktionen, die wir im Abschnitt I.2.6 mit den Formeln (I.8), (I.9) schon bereitgestellt haben und die Grenzwerte (I.12), sowie (I.13) aus Abschnitt I.2.7:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h}\\ &= \frac{\sin(x)\big(\cos(h)-1\big)+\cos(x)\sin(h)}{h}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sin(x)\,\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\,\frac{\sin(h)}{h} \\
\xrightarrow{h\to 0}\ & \cos(x)\,,
\end{aligned}
$$

denn nach (I.13), (I.12) strebt $\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h}$ für $h \to 0$ gegen 0 und $\cos(x)\frac{\sin(h)}{h}$ gegen $\cos(x)$. Genauso untersuchen wir nun $g(x) = \cos(x)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h} \\
&= \frac{\cos(x)\big(\cos(h)-1\big)-\sin(x)\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x)\,\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h} \\
\xrightarrow{h\to 0}\ & -\sin(x)\,.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten die Ableitungsregeln

$$\sin' = \cos\,, \tag{I.21}$$

$$\cos' = -\sin\ . \tag{I.22}$$

Die Ableitung des Tangens können wir daraus leicht ausrechnen, wenn wir die Quotientenregel zur Verfügung haben werden (siehe Abschnitt I.4.4).

I.3.11 Die Ableitung der e-Funktion

$$
\begin{aligned}
\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} &= \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x\,\frac{e^h-1}{h} \\
\xrightarrow{h\to 0}\ & e^x = \exp(x)\,,
\end{aligned}
$$

denn wir hatten in Abschnitt I.2.9 schon darauf hingewiesen, daß die Tangente bei $x = 0$ die Steigung 1 hat, d.h., daß $\frac{e^h-1}{h}$ für $h \to 0$ gegen 1 strebt. Das bedeutet

$$\exp' = \exp\ . \tag{I.23}$$

Nun können wir einen Hinweis darauf geben, warum die Zahl e durch den Grenzwert (I.16) gegeben sein muß, damit $\exp' = \exp$ gelten kann. Wir wissen daß $\exp' = \exp$ genau dann gilt, wenn $\frac{e^h-1}{h} \to 1$ für $h \to 0$ gilt. Daraus folgt, daß $\frac{e^h-1}{h} \approx 1$ für kleine h erfüllt sein muß. Wir wählen $h = \frac{1}{n}$ mit großem $n \in \mathbb{N}$ und erhalten damit nacheinander:

$$\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \approx 1\,, \qquad e^{\frac{1}{n}} - 1 \approx \frac{1}{n}\,, \qquad e^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{1}{n}\,.$$

Im letzten Schritt nehmen wir beide Seiten zur n-ten Potenz. Links erhalten wir $(e^{1/n})^n = e$ und rechts $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Die eigentliche Arbeit besteht nun darin, nachzuweisen, daß das $\approx$-Zeichen bei diesem letzten Schritt weiterhin seine Berechtigung behält:

$$e \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ .$$

I.4 Die Ableitungsregeln

Um unseren Vorat an ableitbaren Funktionen zu erweitern, stellen wir Rechenregeln für die Ableitung auf, die es uns erlauben, die Ableitung von Funktionen aus den Ableitungen ihrer einfacheren Bestandteile zu gewinnen. Für jede der Operationen, die man mit Funktionen ausführen kann (vergl. Abschnitt I.1.5) gibt es eine Ableitungsregel.

I.4.1 Faktorregel Bilden wir aus einer Funktion f durch Multiplikation mit einer festen Zahl t die neue Funktion $g = t \cdot f$, so ist ihre Ableitung $g' = t \cdot f'$:

$$\begin{aligned}(t \cdot f)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(t \cdot f)(x+h) - (t \cdot f)(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{t \cdot f(x+h) - t \cdot f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} t \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = t \cdot f'(x) = (t \cdot f')(x)\,.\end{aligned}$$

Ob wir also eine Funktion mit der Zahl t multiplizieren und die entstehende Funktion ableiten, oder ob wir zuerst ableiten und dann mit t multiplizieren, läuft auf dasselbe hinaus.

$\boxed{\text{B}}$ $f(x) = x^4$, $t = 3$, $g(x) = 3x^4 = 3f(x)$. Dann ist $g'(x) = 3f'(x) = 3 \cdot 4x^3 = 12x^3$.

$h(x) = \frac{3}{5x} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x}$, $h'(x) = \frac{3}{5} \cdot \frac{-1}{x^2} = -\frac{3}{5x^2}$.

$k(x) = 2\sin(x)$, $k'(x) = 2\cos(x)$.

$\ell(x) = 5e^x$, $\ell'(x) = 5e^x$.

I.4.2 Summenregel Die Ableitung $(f+g)'$ einer Summe zweier Funktionen f und g ist die Summe $f' + g'$ ihrer Ableitungen f' und g': $(f+g)' = f' + g'$

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)\,.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{B}}$ $f(x) = 3x^4$, $g(x) = x^6$, $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = 12x^3 + 6x^5$.

$g(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4$, $g'(x) = 2 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 2x = 6x^2 + 10x$.

$k(x) = 2\sin(x) + \cos(x)$, $k'(x) = 2\cos(x) - \sin(x)$.

I.4.3 Produktregel $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\, g(x+h) + f(x)\, \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{B}}$ $h(x) = x \cdot \sin(x),\ f(x) = x,\ g(x) = \sin(x),\ h'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x).$

$f(x) = x^2\, e^x,\ f'(x) = 2x\, e^x + x^2\, e^x = (2x + x^2)\, e^x = x(2+x)\, e^x.$

$g(x) = \sin^2(x) = \sin(x)\sin(x),$

$g'(x) = \cos(x)\sin(x) + \sin(x)\cos(x) = 2\cos(x)\sin(x).$

I.4.4 Quotientenregel $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Wir zeigen diese Regel zunächst nur für die Funktion $\frac{1}{g}$: $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)\,h} \\
&= \lim_{h\to 0} -\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \frac{1}{g(x+h)g(x)} = -\,g'(x)\,\frac{1}{g(x)^2} \\
&= -\frac{g'(x)}{g^2(x)}\,.
\end{aligned}
$$

Nun ist der allgemeine Fall nur noch die Anwendung der Produktregel I.4.3:

$$
\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \left(\frac{1}{g}\right) + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - f\,\frac{g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}\,.
$$

$\boxed{\text{B}}$ $h(x) = \dfrac{2x^2-3x}{x^2+1}$, $f(x) = 2x^2-3x$, $f'(x) = 4x-3$, $g(x) = x^2+1$, $g'(x) = 2x$,

$$h'(x) = \frac{(4x-3)(x^2+1)-(2x^2-3x)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^3+4x-3x^2-3-4x^3+6x^2}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{3x^2+4x-3}{(x^2+1)^2}.$$

$$f(x) = \frac{x^2-3x+5}{2x^2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{5}{x^2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1-3\,\frac{1}{x}+5\,\frac{1}{x^2}\Big)\,,$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\Big(3\,\frac{1}{x^2}-5\,\frac{2}{x^3}\Big) = \frac{3x-10}{2x^3}.$$

Man sieht: Nicht immer ist die Quotientenregel die beste Wahl.

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)},\ \tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x)+\sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

I.4.5 Kettenregel $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$$(f\circ g)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(f\circ g)(x+h)-(f\circ g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(y+k)-f(y)}{k}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$= f'(y)\cdot g'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)\,,$$

mit $k = g(x+h)-g(x)$ und $g(x+h) = y+k$, wobei wir $y = g(x)$ setzen. Für $h\to 0$ strebt auch k gegen Null, denn g ist stetig. Also strebt der erste Bruch gegen $f'(y) = f'(g(x))$ und der zweite gegen $g'(x)$.

$\boxed{\text{B}}$ $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $g(x) = x^3-8$, $g'(x) = 3x^2$. Dann ist $f\circ g(x) = \sqrt{x^3-8}$ und $(f\circ g)'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}}\cdot g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^3-8}}\,3x^2 = \dfrac{3}{2}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3-8}}$.

$h(x) = \dfrac{2}{2x^2+5}$ setzt sich aus den beiden Funktionen $f(x) = \dfrac{2}{x}$ und $g(x) = 2x^2+5$ zusammen. $f'(x) = -\dfrac{2}{x^2}$, $g'(x) = 4x$.

Also ist $h'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x) = -\dfrac{2}{g(x)^2}\cdot 4x = -\dfrac{8x}{(2x^2+5)^2}\,.$

Ü Leiten Sie die folgenden Funktionen ab.

$$f(x) = \tfrac{1}{40}(x^4 - 26x^2 + 48x - 23) \qquad g(x) = \frac{x^3 - 5x^2 - x + 5}{3x^2}$$

$$h(x) = \frac{3x^3}{3x^2 - 4} \qquad k(x) = x^2 e^x$$

$$\ell(x) = e^{-3x+2} \qquad m(x) = e^{-2x^2}$$

$$n(x) = \frac{x}{e^x} \qquad p(x) = \sin(e^{2x^2})$$

$$q(x) = \frac{3(x-1)^2}{x^3 - 2} \qquad \mathrm{ch}(x) = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\mathrm{sh}(x) = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad \mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \qquad r(x) = \frac{(x^2+1)\,e^x}{x-1}$$

$$s(x) = (x^3 - 8x^2)^8 \qquad t(x) = \frac{1}{(2x^3 + x)^3}$$

$$u(x) = \sin(2x)\cos(x) \qquad v(x) = e^{-3x}\cos(x)$$

$$w(x) = \frac{e^x \cos(x)}{e^x + \sin(x)} \qquad z(x) = \frac{e^{-3x}}{\cos(2x)}$$

Kontrollergebnis:

$$f'(x) = \tfrac{1}{10}(x^3 - 13x + 12) \qquad g'(x) = \frac{x^3 + x - 10}{3x^3}$$

$$h'(x) = 9\,\frac{x^4 - 4x^2}{(3x^2 - 4)^2} \qquad k'(x) = x(2+x)\,e^x$$

$$\ell'(x) = -3\,e^{-3x+2} \qquad m'(x) = -4x\,e^{-2x^2}$$

$$n'(x) = (1-x)\,e^{-x} \qquad p'(x) = 4x\,e^{2x^2}\cos(e^{2x^2})$$

$$q'(x) = -3\,\frac{(x-1)(x^3 - 3x^2 + 4)}{(x^3-2)^2} \qquad \mathrm{ch}'(x) = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \mathrm{sh}(x)$$

$$\mathrm{sh}'(x) = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \mathrm{ch}(x) \qquad \mathrm{th}'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$$

$$\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} \qquad r'(x) = \frac{(x^3 - x - 2)\,e^x}{(x-1)^2}$$

$$s'(x) = 8x^{15}\,(3x - 16)\,(x-8)^7 \qquad t'(x) = -3\frac{6x^2+1}{(2x^3+x)^4}$$

$$u'(x) = 2\cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) \qquad v'(x) = -\big(3\cos(x) + \sin(x)\big)\,e^{-3x}$$

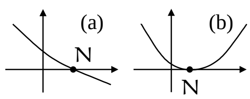
$$w'(x) = \frac{e^x\big(\sin(x)\cos(x) - e^x\sin(x) - 1\big)}{(e^x + \sin(x))^2} \qquad z'(x) = \frac{2\sin(2x) - 3\cos(2x)}{e^{3x}\cos^2(2x)}$$

I.5 Kurvendiskussion

I.5.1 Markante Punkte einer Funktion Die Aufgabe der Kurvendiskussion besteht darin, den Kurvenverlauf einer Funktion f möglichst exakt zu ermitteln. Dazu stellt man Untersuchungen zur Stetigkeit, Differenzierbarkeit an, versucht Symmetrien und Asymptoten zu erkennen. Besonders wichtig sind auch die markanten Punkte einer Funktion, wie Nullstellen, lokale (globale) Maxima oder Minima und Wendepunkte (d.h., Stellen, an denen die Kurve von einer Rechts- in eine Linkskurve oder umgekehrt wechselt). Für Funktionen, die genügend glatt sind, so wie sie hier überwiegend vorliegen werden, entfallen die Untersuchungen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit, da sie gegeben sind. Wir beschränken uns daher im folgenden auf das Finden der markanten Punkte einer Funktion.

In der nebenstehenden Figur ist eine Funktion f und ihre Ableitung f' wiedergegeben, die alle markanten Punkte aufweist.

1. Nullstellen: Die Stellen x, an denen $f(x) = 0$ gilt. Wir unterscheiden Nullstellen mit Vorzeichenwechsel (a), also Stellen, an denen f die x-Achse wirklich schneidet und Nullstellen ohne Vorzeichenwechsel (b), Stellen, an denen f die x-Achse nur berührt. Im letzteren Fall liegt dann ein lokales Maximum oder Minimum vor.



2. Extremstellen: Lokale Maxima und Minima verraten sich durch ihre waagrechte Tangente. Da $f'(x)$ die Steigung der Tangente an der Stelle x angibt, finden wir die möglichen Positionen also als Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$.
Identifikation: Stellen x, an denen sich ein lokales Maximum befindet, sind zweifelsfrei daran zu erkennen, daß die Ableitung f' an der betreffenden Stelle einen Vorzeichenwechsel (VZW) von $\oplus$ nach $\ominus$ aufweist. Wenn wir nämlich von links nach

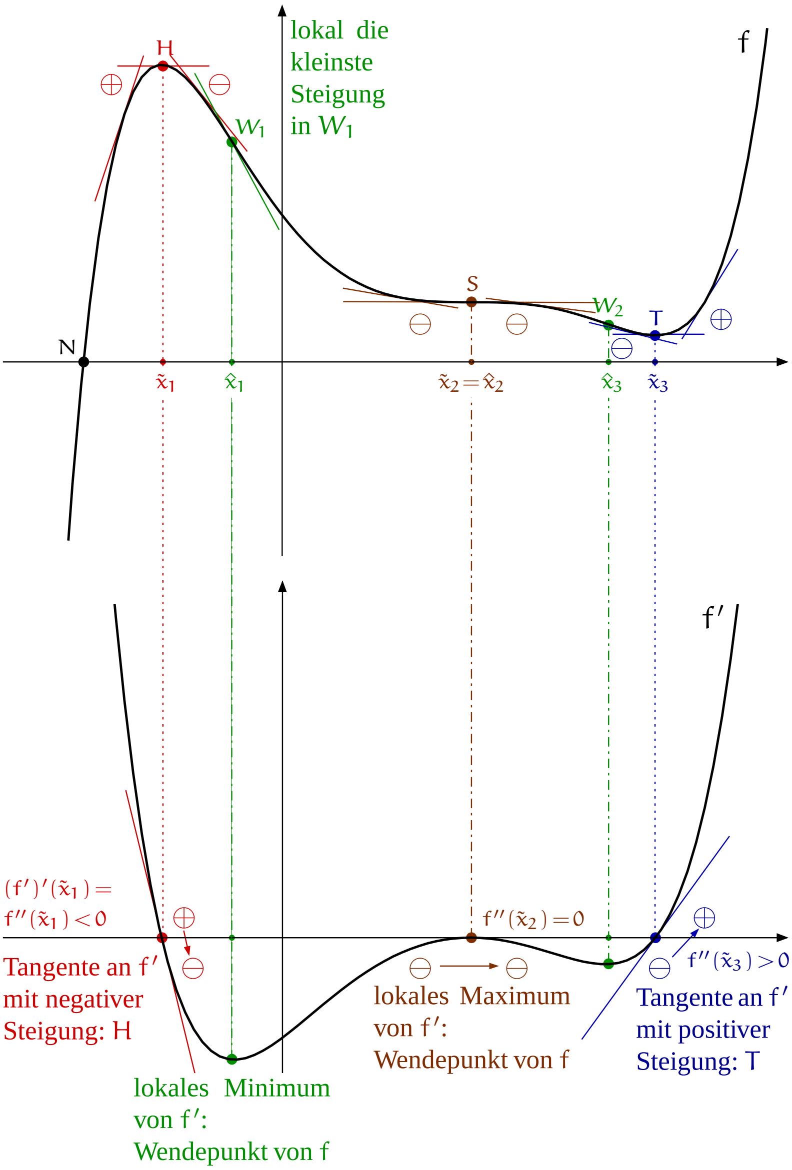
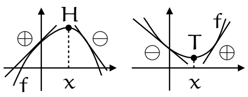
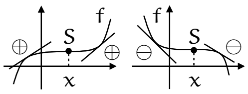


Abbildung I.16 *Die markanten Punkte einer Funktion*

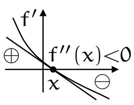


rechts ein lokales Maximum H passieren, so müssen wir uns zunächst bergauf (positives Vorzeichen $\oplus$ von f') und dann bergab (negatives Vorzeichen $\ominus$ von f') bewegen. Genauso läßt sich ein lokales Minimum T durch ein VZW von $\ominus$ nach $\oplus$ identifizieren. Wir wollen diese Methode die *Vorzeichenmethode* zur Identifikation lokaler Maxima oder Minima (auch als *Hochpunkte* bzw. *Tiefpunkte* bezeichnet) nennen.

Die Vorzeichenmethode identifiziert uns auch den Sonderfall, in dem zwar $f'(x) = 0$ gilt, aber kein Vorzeichenwechsel stattfindet. Dann muß für die Ableitung f' entweder der Übergang $\oplus \to \oplus$ oder $\ominus \to \ominus$ vorliegen. Im ersten Fall steigt die Funktion, hat dann an der Stelle x eine waagrechte Tangente und steigt anschließend weiter. Im zweiten Fall fällt die Funktion, unterbrochen durch eine Stelle waagrechter Tangente. In beiden Fällen liegt also ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente, ein sog. *Sattelpunkt* vor, denn im ersten Fall beschreibt die Funktion bis zur Stelle x eine Rechtskurve und anschließend eine Linkskurve, im zweiten Fall geht sie von einer Links- in eine Rechtskurve über (vergl. auch die Stelle $\tilde{x}_2$ in Abbildung I.16).

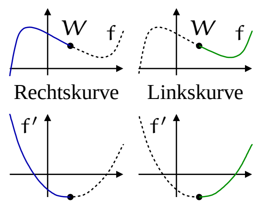


Eine andere Methode, ein lokales Maximum bzw. Minimum zu erkennen, besteht darin, eine hinreichende Bedingung für den VZW von f' zu untersuchen: f' macht an der Stelle x sicher dann ein VZW von $\oplus$ nach $\ominus$, d.h., bei x befindet sich ein lokales Maximum, wenn die Steigung der Tangente an f' in x negativ ist (vergl. die Stelle $\tilde{x}_1$ in Abbildung I.16). Die Steigung der Tangente an f' in x wird, wie bei jeder anderen differenzierbaren Funktion auch, durch die Ableitung in x gegeben: $(f')'(x) = f''(x)$. Als hinreichende Bedingung für ein lokales Maximum erhalten wir also $f''(x) < 0$ und entsprechend $f''(x) > 0$ für ein lokales Minimum. Man beachte aber, daß es sich wirklich nur um *hinreichende* Bedingungen handelt. Wenn sie nicht erfüllt sind, wenn also $f''(x) = 0$ gilt, heißt das noch nicht, daß kein Maximum oder Minimum vorliegt (obwohl es in vielen Fällen so ist, denn meist tritt diese Situation auf, wenn an der betreffenden Stelle ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente, also ein *Sattelpunkt* vorliegt). Es gibt durchaus die Möglichkeit eines Vorzeichenwechsels von f' mit waagrechter Tangente, d.h., ein VZW, bei dem $f''(x) = 0$ gilt. Dann liegt also ein lokales Maximum oder Minimum vor, ohne daß wir es durch das Vorzeichen der zweiten Ableitung identifizieren können. Z.B. hat die Funktion $f(x) = x^4$ an der Stelle $x = 0$ ein Minimum, aber $f''(x)$ ist durch $12x^3$ gegeben, so daß $f''(0) = 0$ gilt. Die Vorzeichenmethode ergibt aber mit $f'(-1) = -4 < 0$ und $f'(1) = 4 > 0$ problemlos den VZW $\ominus \to \oplus$, also ein lokales Minimum. Um sich in solchen Fällen Klarheit zu verschaffen, kann man die betreffende Stelle auf Wendepunkt hin prüfen (s.u.), um eventuell einen Sattelpunkt zu identifizieren, oder gleich die Vorzeichenmethode anwenden, die immer zu einem definitiven Ergebnis führt.



2. Wendestellen: Stellen x, an denen eine Kurve von einer Rechts- in eine Linkskurve oder von einer Links- in eine Rechtskurve übergeht nennen wir *Wendestellen*. Die zugehörigen Punkte auf der Kurve heißen *Wendepunkte*.

Untersuchen wir zunächst einmal den Übergang von einer Rechts- in eine Linkskurve: Entlang einer Rechtskurve nimmt die Steigung dauernd ab, d.h., die Ableitung f' wird entlang einer Rechtskurve permanent kleiner – solange, bis sie die Stelle erreicht hat, wo sie zur Linkskurve ansetzt. Ab da nimmt die Steigung wieder zu, denn entlang von Linkskurven wächst die Steigung. An der Wendestelle besitzt die Funktion demnach (lokal) die kleinste Steigung. Die Ableitung f' muß an dieser Stelle also ein lokales Minimum annehmen. Lokale Minima können wir aber inzwischen eindeutig mit der Vorzeichenmethode identifizieren: Die Ableitung der betrachteten Funktion – hier ist es f' – muß an der betreffenden Stelle ein VZW von $\ominus$ nach $\oplus$ aufweisen. Das bedeutet: f'' muß an dieser Stelle einen VZW von $\ominus \to \oplus$ haben, wenn sie von einer Rechts- in eine Linkskurve wechseln soll. Genauso überlegen wir uns, daß f genau dann von einer Links- in eine Rechtskurve wechselt, wenn an der betreffenden Stelle ein VZW $\oplus \to \ominus$ für f'' vorliegt. Da man sich aber normalerweise schon mit der Tatsache begnügt, daß überhaupt ein Wendepunkt vorliegt, ohne genauer nach der Art des Wendens zu fragen, reicht es aus, nur den VZW von f'' festzustellen, um einen Wendepunkt für f nachzuweisen.



Auch für Wendepunkte gibt es eine alternative Identifizierungsmethode, die jedoch, genau wie für lokale Maxima und Minima, nur hinreichend, aber nicht notwendig ist. Wir wenden nämlich einfach die alternative Methode zur Identifizierung von lokalen Maxima und Minima auf f' an: Wir setzen die betreffende Stelle x in die zweite Ableitung der Funktion – hier also f' – ein. Das ist dann $f'''(x)$. Da wir uns normalerweise, wie oben beschrieben, nicht für die genaue Art der Wendestellen interessieren (die durch $f'''(x) > 0$ bzw. $f'''(x) < 0$ zu unterschieden wären), genügt es nachzuweisen, daß $f'''(x) \neq 0$ gilt.

I.5.2 Kurvendiskussion: Die einzelnen Schritte

1. Nullstellen: Löse die Gleichung $f(x) = 0$.

Die Lösungen $x_1, x_2, \ldots$ liefern die Nullstellen $N_1(x_1\,|\,0)$, $N_2(x_2\,|\,0)$, $N_3(x_3\,|\,0)$, ...

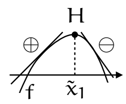
2. Extremstellen: Löse die Gleichung $f'(x) = 0$.

Bestimme zu den Lösungen $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, \ldots$ (den möglichen Stellen der lokalen Maxima, Minima oder Sattelpunkte) die zugehörigen y-Werte $\widetilde{y}_1 = f(\widetilde{x}_1)$, $\widetilde{y}_2 = f(\widetilde{x}_2)$, $\widetilde{y}_3 = f(\widetilde{x}_3)$, ...

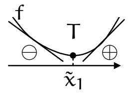
Identifikation:

(a) Vorzeichenmethode: (notwendig und hinreichend)
Setze einen x-Wert links von $\widetilde{x}_1$ und einen rechts von $\widetilde{x}_1$ in f' ein (die Punkte x sind beliebig wählbar, solange sie sich nicht jenseits benachbarter Extremstellen befinden) und stelle jeweils das Vorzeichen fest.

VZW für f' $\quad \oplus \to \ominus$: $\quad$ lokales Maximum $H(\widetilde{x}_1 \,|\, \widetilde{y}_1)$,

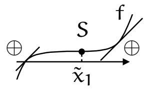


VZW für f' $\quad \ominus \to \oplus$: $\quad$ lokales Minimum $T(\widetilde{x}_1 \,|\, \widetilde{y}_1)$,

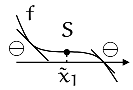


kein

VZW für f' $\quad \oplus \to \oplus$: $\quad$ Sattelpunkt $S(\widetilde{x}_1 \,|\, \widetilde{y}_1)$,



$\ominus \to \ominus$: $\quad$ Sattelpunkt $S(\widetilde{x}_1 \,|\, \widetilde{y}_1)$.



(b) alternativ: (nur hinreichend)
Setze $\widetilde{x}_1$ in f'' ein.

$f''(\widetilde{x}_1) < 0$: $\quad$ lokales Maximum $H(\widetilde{x}_1 \,|\, \widetilde{y}_1)$,

$f''(\widetilde{x}_1) > 0$: $\quad$ lokales Minimum $T(\widetilde{x}_1 \,|\, \widetilde{y}_1)$,

$f''(\widetilde{x}_1) = 0$: $\quad$ Teste auf Wendepunkt (s.u.). Falls erfolgreich, dann liegt ein Sattelpunkt $S(\widetilde{x}_1 \,|\, \widetilde{y}_1)$ vor.

Verfahre genauso mit den restlichen Lösungen $\widetilde{x}_2$, $\widetilde{x}_3$, ...

3. Wendestellen: Löse die Gleichung $f''(x) = 0$.

Bestimme zu den Lösungen $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$, . . . (den möglichen Stellen der Wendepunkte) die zugehörigen y-Werte $\hat{y}_1 = f(\hat{x}_1)$, $\hat{y}_2 = f(\hat{x}_2)$, $\hat{y}_3 = f(\hat{x}_3)$, ...

Identifikation:

(a) Vorzeichenmethode: (notwendig und hinreichend)
Setze einen x-Wert links von $\hat{x}_1$ und einen rechts von $\hat{x}_1$ in f'' ein (die Punkte x sind beliebig wählbar, solange sie sich nicht jenseits benachbarter Wendestellen befinden) und stelle jeweils das Vorzeichen fest.

VZW für f'' : $\quad$ Wendepunkt $W(\hat{x}_1 \,|\, \hat{y}_1)$.

(b) alternativ: (nur hinreichend)
Setze $\hat{x}_1$ in f''' ein.

$f'''(\hat{x}_1) \neq 0$: $\quad$ Wendepunkt $W(\hat{x}_1 \,|\, \hat{y}_1)$.

Verfahre genauso mit den restlichen Lösungen $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$, ...

Markante Punkte	mögliche Stellen x	Art	Identifikation: notwendig und hinreichend	Identifikation: hinreichend
1. Nullstellen	$f(x) = 0$			
2. Extremstellen	$f'(\tilde{x}) = 0$	lokales Maximum	VZW von f' bei $\tilde{x}$ $\oplus \rightarrow \ominus$ „bergauf-bergab“	$f''(\tilde{x}) < 0$
		lokales Minimum	VZW von f' bei $\tilde{x}$ $\ominus \rightarrow \oplus$ „bergab-bergauf“	$f''(\tilde{x}) > 0$
		Sattelpunkt	kein VZW von f' bei $\tilde{x}$ $\oplus \rightarrow \oplus$ $\ominus \rightarrow \ominus$	$f''(\tilde{x}) = 0$ und $f'''(\tilde{x}) \neq 0$
3. Wendestellen	$f''(\hat{x}) = 0$	Wendepunkt	VZW von f'' bei $\hat{x}$	$f'''(\hat{x}) \neq 0$

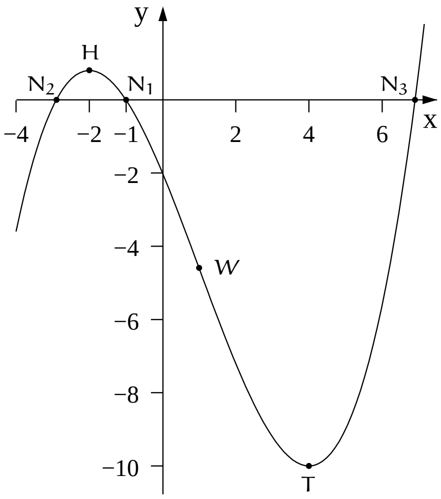


Abbildung I.17
$f(x) = \frac{1}{10}(x^3 - 3x^2 - 24x - 20)$

I.5.3 Beispiel (a)

$$f(x) = \frac{1}{10}(x^3 - 3x^2 - 24x - 20)\,,$$
$$f'(x) = \frac{3}{10}(x^2 - 2x - 8)\,,$$
$$f''(x) = \frac{3}{5}(x - 1)\,,$$
$$f'''(x) = \frac{3}{5}\,.$$

1. Nullstellen: $f(x) = \frac{1}{10}(x^3 - 3x^2 - 24x - 20) = 0$.
Die erste Nullstelle $x_1 = -1$ raten wir. Polynomdivision (vergl. S. 10) von $x^3 - 3x^2 - 24x - 20$ mit $(x - (-1)) = (x + 1)$ ergibt $x^2 - 4x - 20$. Für die weiteren Nullstellen müssen wir nun nur noch die quadratische Gleichung $x^2 - 4x - 20 = 0$ lösen. Dafür verwenden wir die Mitternachtsformel (I.1) und erhalten $x_2 = 2 - 2\sqrt{6} \approx -2.9$ und $x_3 = 2 + 2\sqrt{6} \approx 6.9$, also $N_1(-1\,|\,0)$, $N_2(2 - 2\sqrt{6}\,|\,0)$, $N_3(2 + 2\sqrt{6}\,|\,0)$.

2. Extremstellen: $f'(x) = \frac{3}{10}(x^2 - 2x - 8) = 0$. Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $\tilde{x}_1 = -2$ und $\tilde{x}_2 = 4$ mit den zugehörigen y-Werten $\tilde{y}_1 = 0.8$ und $\tilde{y}_2 = -10$.
Identifikation: Wir untersuchen $\tilde{x}_1 = -2$ z.B. mit der Vorzeichenmethode für f'. Dazu wählen wir eine Stelle links von -2, etwa -3 und eine rechts, am einfachsten 0. $f'(-3) = \frac{21}{10} > 0$ und $f'(0) = -\frac{24}{10} < 0$. Es liegt also ein Vorzeichenwechsel $\oplus \to \ominus$ vor, d.h., es handelt sich um ein lokales Maximum.
Die Stelle $\tilde{x}_2 = 4$ identifizieren wir durch Einsetzen in die zweite Ableitung: $f''(4) = \frac{9}{5} > 0$, d.h., es handelt sich um ein lokales Minimum. Also: $H(-2\,|\,0.8)$, $T(4\,|\,-10)$.

3. Wendepunkte: $f''(x) = \frac{3}{5}(x - 1) = 0$ liefert die einzige Lösung $\hat{x} = 1$ mit y-Wert $\hat{y} = -4.6$. Da die dritte Ableitung konstant $\neq 0$ ist, also $f'''(1) \neq 0$ gilt, liegt tatsächlich ein Wendepunkt vor: $W(1\,|\,-4.6)$.

I.5.4 Beispiel (b)

$$f(x) = \frac{1}{40}(x^4 - 26x^2 + 48x - 23)\,,$$
$$f'(x) = \frac{1}{10}(x^3 - 13x + 12)\,,$$
$$f''(x) = \frac{1}{10}(3x^2 - 13)\,,$$
$$f'''(x) = \frac{3}{5}x\,.$$

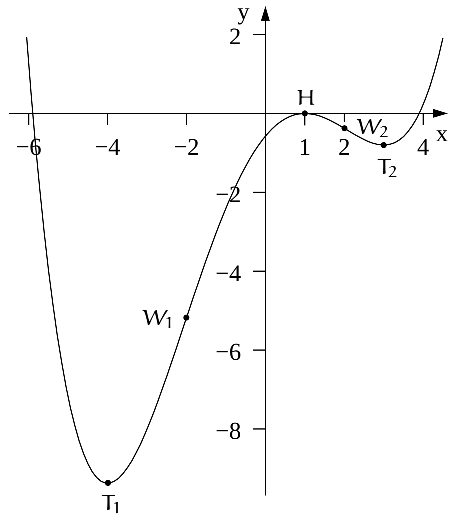


Abbildung I.18
$f(x) = \frac{1}{40}(x^4 - 26x^2 - 48x - 23)$

1. Nullstellen: $f(x) = \frac{1}{40}(x^4 - 26x^2 - 48x - 23) = 0$. Durch Raten erhalten wir $x_1 = 1$ als erste Lösung. Nach Polynomdivision mit $(x - 1)$ verbleibt immer noch eine Gleichung dritten Grades, nämlich $x^3 + x^2 - 25x + 23 = 0$, für die x_1 ebenfalls eine Lösung ist (1 ist also eine doppelte Nullstelle, vergl. S. 11). Erneute Polynomdivision mit $(x - 1)$ ergibt die quadratische Gleichung $x^2 + 2x - 23 = 0$, die wir mit der Mitternachtsformel lösen können: $x_2 = -2\sqrt{6} - 1 \approx -5.9$ und $x_3 = 2\sqrt{6} - 1 \approx 3.9$.

2. Extremstellen: $f'(x) = \frac{1}{10}(x^3 - 13x + 12) = 0$ ist eine Gleichung dritten Grades. Da bei $x_1 = 1$ eine doppelte Nullstelle vorliegt, also eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel, muß es sich um ein lokales Maximum oder Minimum handeln. D.h., wir kennen bereits eine Lösung der Gleichung $f'(x) = 0$. Polynomdivision mit $(x - 1)$ ergibt $x^2 + x - 12 = 0$, mit den Lösungen $\tilde{x}_2 = -4$ und $\tilde{x}_3 = 3$. Die y-Werte: $\tilde{y}_2 = -\frac{75}{8} = -9.75$ und $\tilde{y}_3 = -\frac{4}{5} = -0.8$. Identifikation durch Einsetzen in die zweite Ableitung ergibt $T_1(-4 \mid -\frac{75}{8})$, $T_2(3 \mid -\frac{4}{5})$ und $H(1 \mid 0)$.

3. Wendepunkte: $f''(x) = \frac{1}{10}(3x^2 - 13) = 0$ hat die Lösungen $\hat{x}_1 = -\sqrt{\frac{13}{3}} \approx -2.1$ und $\hat{x}_2 = \sqrt{\frac{13}{3}}$, für die die zugehörigen y-Werte $\hat{y}_1 = -\frac{263}{90} - \frac{2}{5}\sqrt{39} \approx -5.42$ und $\hat{y}_2 = -\frac{263}{90} + \frac{2}{5}\sqrt{39} \approx -0.42$ lauten.

I.5.5 Beispiel (c)

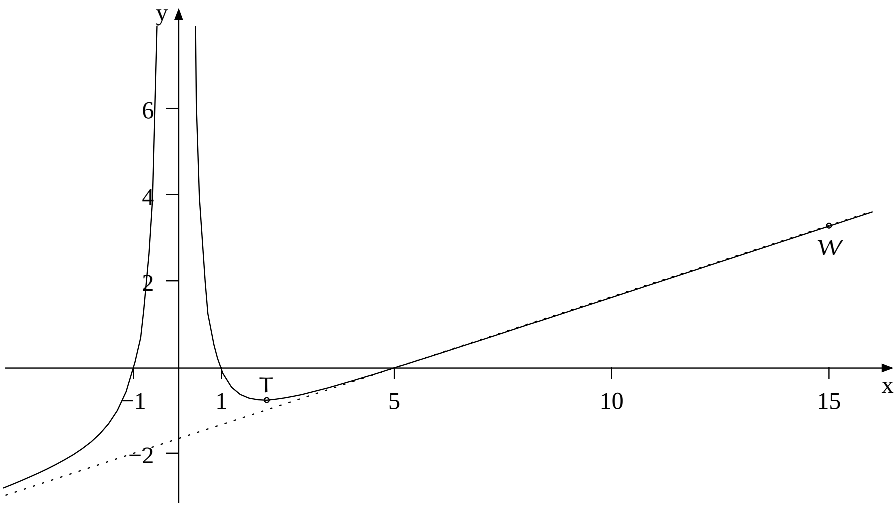


Abbildung I.19 $g(x) = \frac{x^3-5x^2-x+5}{3x^2}$

$$g(x) = \frac{x^3 - 5x^2 - x + 5}{3x^2}$$

Wir schreiben die Funktion zunächst etwas um. Auf diese Weise vermeiden wir es, für die Ableitung die Quotientenregel verwenden zu müssen:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x^3}{3x^2} - \frac{5x^2}{3x^2} - \frac{x}{3x^2} + \frac{5}{3x^2} \\ &= \frac{x}{3} - \frac{5}{3} - \frac{1}{3x} + \frac{5}{3x^2} \\ &= \frac{1}{3}x - \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} - 5\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{3}x - \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\left(x^{-1} - 5x^{-2}\right), \end{aligned}$$

mit der Ableitung

$$g'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-x^{-2} + 10x^{-3}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{10}{x^3}\right) = \frac{x^3 + x - 10}{3x^3}.$$

Als zweite Ableitung erhalten wir, indem wir zur Berechnung natürlich die Version $g'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-x^{-2} + 10\,x^{-3}\right)$ benutzen:

$$g''(x) = -\frac{1}{3}\left(2x^{-3} - 30x^{-4}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^3} - \frac{30}{x^4}\right) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{x - 15}{x^4}.$$

g besitzt die Asymptote $y(x) = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ und die senkrechte Asymptote $x = 0$, also die y-Achse. Für die Nullstellen müssen wir die Gleichung $g(x) = 0$, also $x^3-5x^2-x+5 = 0$ lösen. Da wir dafür keine Lösungsformel haben, versuchen wir eine Lösung zu raten. Wir erinnern uns, daß eine ganzzahligen Lösung ein Teiler des letzten Summanden sein müßte. Da 5 eine Primzahl ist, kommen nur die Zahlen ± 1 und ± 5 in Frage (vergl. Seite 9). Der erste Versuch $x_1 = 1$ führt bereits zum Ziel. Die Polynomdivision von $x^3-5x^2-x+5 = 0$ mit $(x-1)$ führt auf $x^2 - 4x - 5$. Mögliche weitere Nullstellen gewinnen wir also durch Lösen von $x^2 - 4x - 5 = 0$, wofür uns nun die Mitternachtsformel (I.1) zur Verfügung steht. Wir erhalten $x_2 = -1$ und $x_3 = 5$.

Die Extremstellen bestimmen wir durch die Lösungen von $g'(x) = 0$, also $x^3+x-10 = 0$. Die Rateversuche $x = 1$ und $x = -1$ mißglücken, aber $x = 2$ ist erfolgreich. Der zugehörige y-Wert ist $y = -\frac{3}{4}$. $f''(2) = \frac{2 \cdot 13}{3 \cdot 2^4} > 0$ verrät uns, daß es sich um einen Tiefpunkt handelt: $T(2\,|\,-\frac{3}{4})$. Polynomdivision mit $(x-2)$ führt für die weiteren Extremstellen auf die quadratische Gleichung $x^2+2x+5 = 0$, die jedoch keine reellen Lösungen besitzt. Damit ist T die einzige Extremstelle. Der Wendepunkt ist bei $x = 15$ zu finden: $W(15\,|\,\frac{448}{135})$.

I.5.6 Beispiel (d)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}\,, \\
f'(x) &= \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4+3x^2-2x^4}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}\,, \\
f''(x) &= \frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2 - 4x(x^4+3x^2)(x^2+1)}{(x^2+1)^4} \\
&= \frac{(x^2+1)\left((4x^3+6x)(x^2+1) - 4x(x^4+3x^2)\right)}{(x^2+1)^4} \\
&= \frac{(4x^3+6x)(x^2+1) - 4x^5 - 12x^3}{(x^2+1)^3} \\
&= \frac{4x^5+4x^3+6x^3+6x-4x^5-12x^3}{(x^2+1)^3} \\
&= \frac{-2x^3+6x}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}\,.
\end{aligned}
$$

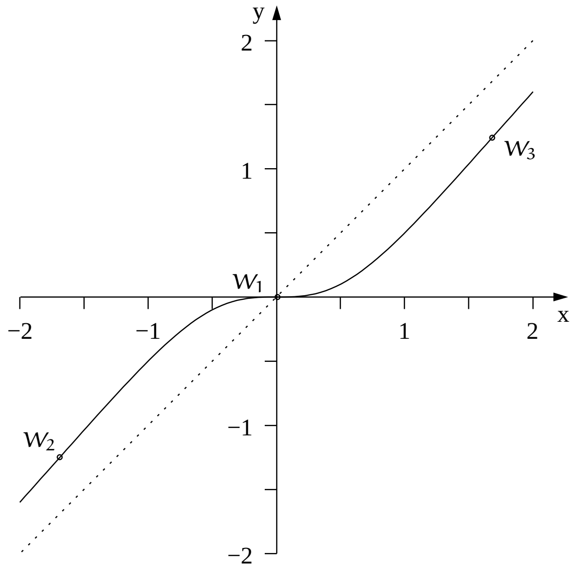


Abbildung I.20 $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung, denn der Zähler besitzt nur ungerade und der Nenner nur gerade Hochzahlen. $y(x) = x$ ist eine schräge Asymptote. Nullstelle nur bei $x = 0$.

Die einzige Extremstelle liegt ebenfalls bei $x = 0$. Überprüfung mit der zweiten Ableitung ergibt $f''(0) = 0$, d.h., nun muß auf Wendepunkt getestet werden. Da wir uns die dritte Ableitung ersparen wollen, wenden wir die Vorzeichenmethode für f'' an: $f''(-1) = \frac{2\cdot(-2)}{8} < 0$, $f''(1) = \frac{-2\cdot(-2)}{8} > 0$. Also liegt im Ursprung ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente, also ein Sattelpunkt vor (man beachte, daß die Zahlen -2 und 2 zum testen nicht mehr zulässig sind, denn sie liegen bereits jenseits der benachbarten Wendestellen $\pm\sqrt{3}$).
Für die Wendepunkte müssen wir die Gleichung $2x(x^2-3) = 0$ lösen. Die erste Lösung $x_1 = 0$ haben wir eben untersucht. Die beiden anderen Lösungen $x_2 = -\sqrt{3}$ und $x_3 = \sqrt{3}$ ergeben ebenfalls Wendepunkte. $y_2 = f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{4}\sqrt{3}$, $y_3 = f(\sqrt{3}) = -\frac{3}{4}\sqrt{3}$.
Überprüfung: $f''(-2) = \frac{4(4-3)}{5^3} > 0$, $f''(-1) < 0$. Es liegt also tatsächlich ein Wendepunkt vor. Wegen der Symmetrie der Funktion, ist auch bei x_3 ein Wendepunkt: $W_2(-\sqrt{3}\,|\,-\frac{3}{4}\sqrt{3})$, $W_3(\sqrt{3}\,|\,\frac{3}{4}\sqrt{3})$.

I.5.7 Beispiel (e)

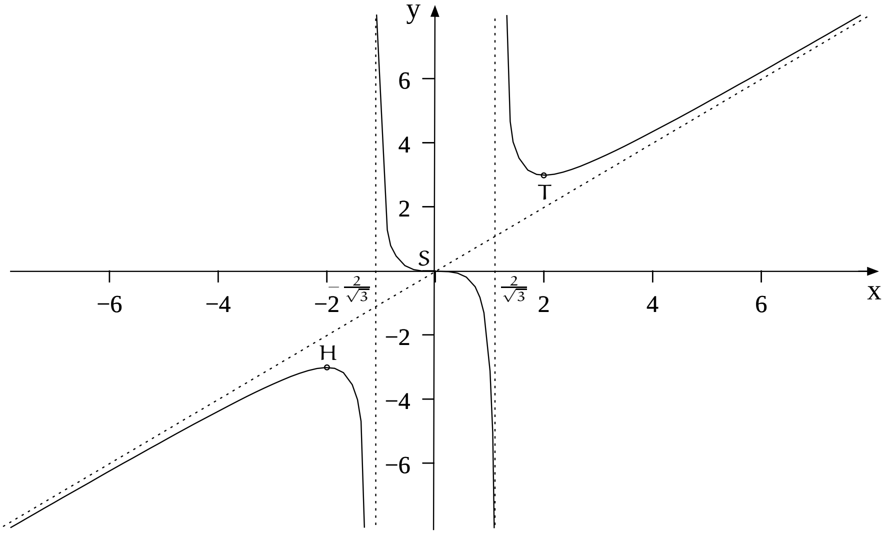


Abbildung I.21 $h(x) = \frac{3x^3}{3x^2-4}$

$h(x) = \dfrac{3x^3}{3x^2-4}$,
$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{3}\}$

Durch Polynomdivision:
$h(x) = x + \dfrac{4x}{3x^2-4}$.

Die Gerade $y(x) = x$ ist also eine Asymptote. h ist punktsymmetrisch zum Ursprung (nur ungerade Hochzahlen für den Zähler und nur gerade Hochzahlen für den Nenner). In den Definitionslücken $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ und $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$ befinden sich senkrechte Asymptoten. Die Ableitungen von h bestimmen wir mit der Quotientenregel:

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= 3\,\frac{3x^2(3x^2-4)-x^3\,6x}{(3x^2-4)^2} = 9\,\frac{3x^4-4x^2-2x^4}{(3x^2-4)^2}\\
&= 9\,\frac{x^4-4x^2}{(3x^2-4)^2} = 9\,\frac{x^2(x^2-4)}{(3x^2-4)^2}\,,\\
h''(x) &= 9\,\frac{(4x^3-8x)(3x^2-4)^2-2\cdot 6x\cdot(x^4-4x^2)(3x^2-4)}{(3x^2-4)^4}\\
&= 9\,\frac{(3x^2-4)\big((4x^3-8x)(3x^2-4)-12x(x^4-4x^2)\big)}{(3x^2-4)^4}\\
&= 9\,\frac{12x^5-16x^3-24x^3+32x-12x^3+48x^3}{(3x^2-4)^3}\\
&= 9\,\frac{8x^3+32x}{(3x^2-4)^3} = 72\,\frac{x(x^2+4)}{(3x^2-4)^3}\,.
\end{aligned}
$$

Die einzige Nullstelle befindet sich im Ursprung. Wegen $h'(0) = 0$, $h''(0) = 0$ und dem Vorzeichenwechsel $h''(-1) > 0$, $h''(1) < 0$ liegt im Ursprung ein Sattelpunkt S vor. Als Extremstellen ergeben sich aus $h'(x) = 0$ die weiteren Lösungen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ mit den zugehörigen y-Werten $y_1 = h(-2) = -3$ und $y_2 = 3$. Identifikation: $h''(2) = \frac{9}{4} > 0$, d.h., bei x_2 liegt ein Tiefpunkt und wegen der Punktsymmetrie von h in x_1 ein Hochpunkt vor: $T(2\,|\,3)$, $H(-2\,|\,-3)$.

I.6 Umkehrfunktionen

In vielen Situationen ist es wünschenswert, eine Funktionsvorschrift umkehren zu können. Z.B. kann es für eine Kostenfunktion f, die der Stückzahl x die Produktionskosten $f(x)$ zuordnet, sinnvoll sein, bei einem gegebenen Kostenrahmen y nach der möglichen Stückzahl x zu fragen, die damit hergestellt werden kann. Es ist also nach dem x gefragt, das die Gleichung $y = f(x)$ erfüllt. Ein anderes Beispiel ist der Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck. Wenn die Gegenkathete a und die Hypothenuse c bekannt sind, läßt sich der Sinus $\frac{a}{c}$ berechnen. Gefragt ist dann nach dem zugehörigen Winkel x, der die Gleichung $\sin(x) = \frac{a}{c}$ erfüllt.

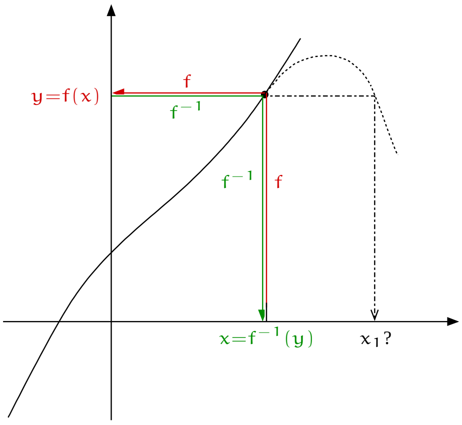


Abbildung I.22
Funktion und Umkehrfunktion

Wir sagen, eine Funktion f *mit Definitionsbereich* D_f *und Wertebereich* W_f *sei* invertierbar *oder* umkehrbar, *wenn es für jedes* y *aus dem Wertebereich genau ein* $x \in D_f$ *gibt, das* y *als Funktionswert hat, das also* $y = f(x)$ *erfüllt.*
Die Funktionsvorschrift, die jedem $y \in W_f$ *das* $x \in D_f$ *mit* $y = f(x)$ *zuordnet, heißt* Inverse, *oder* Umkehrfunktion *von* f. *Sie wird üblicherweise durch* f^{-1} *bezeichnet:* $f^{-1} : W_f \to D_f$.

Bemerkungen
(a) Die Umkehrfunktion f^{-1} von f muß jedem $y \in W_f$ das $x \in D_f$ zuordnen, für das die Gleichung $y = f(x)$ erfüllt ist: $f^{-1}(y) = x$. Also gilt für alle $y \in W_f$

$$f(f^{-1}(y)) = y\,. \tag{I.24}$$

Natürlich ist die Umkehrfunktion von f^{-1} wieder f (man mache sich das klar!). Daher gilt das oben Gesagte auch, wenn wir die Rollen von f und f^{-1} vertauschen:

$$f^{-1}(f(x)) = x\,. \tag{I.25}$$

Diese Gleichung drückt genau das aus, was wir von einer Umkehrfunktion f^{-1} erwarten: Sie hebt die Wirkung von f wieder auf. Wenn wir von einem x den Funktionswert $y = f(x)$ berechnen und dann, mittels f^{-1} nach dem x-Wert fragen, der durch f auf y abbildet wird, so erhalten wir natürlich x als Antwort.

(b) Der Definitionsbereich $D_{f^{-1}}$ von f^{-1} ist der Wertebereich W_f von f und der Wertebereich $W_{f^{-1}}$ von f^{-1} ist der Definitionsbereich D_f von f. Wertebereich und Definitionsbereich vertauschen also ihre Rollen: $D_{f^{-1}} = W_f$, $W_{f^{-1}} = D_f$.

(c) Wenn wir den Graphen von f^{-1} in der Weise zeichnen, wie f^{-1} wirkt, d.h., indem wir jedem Punkt der y-Achse, der einen Funktionswert darstellt, waagrecht daneben seinen x-Wert zuordnen, so erhalten wir denselben Graphen wie für f. Eine Funktion auf diese Weise zu zeichnen ist natürlich etwas ungewohnt. Da Umkehrfunktionen auch für sich interessante Funktionen darstellen, zeichnet man sie, wie jede andere Funktion auch, von der x-Achse aus: $f^{-1} : x \mapsto f^{-1}(x)$. Das bedeutet also, daß sich dabei die Rollen von y- und x-Achse vertauschen. Wir können uns das folgendermaßen vorstellen: Wir denken uns das Koordinatensystem und f in zwei identischen Kopien auf zwei durchsichtige Folien gezeichnet, die deckungsgleich übereinander liegen. Wir nehmen nun die obere Folie, blättern sie um und bringen anschließend die Koordinatenachsen wieder zur Deckung (auch in ihrem Durchlaufsinn von links nach rechts bzw. von unten nach oben), wobei nun aber die x-Achse auf der y-Achse und die y-Achse auf der x-Achse des unteren Bildes zu liegen kommt. Wir erhalten dabei den Graphen von f^{-1} durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden $y(x) = x$.

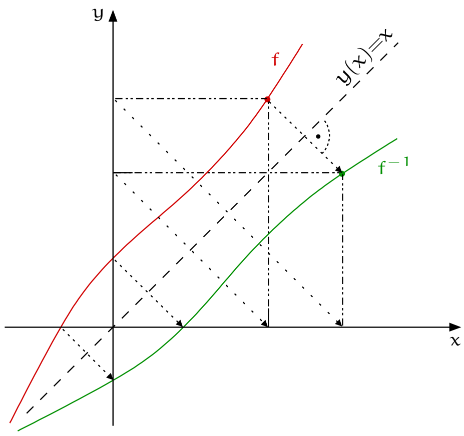


Abbildung I.23
Umkehrfunktion durch Spiegelung an $y(x) = x$

(d) Eine konkrete Umkehrfunktion erhalten wir, indem wir die Gleichung $y = f(x)$ nach x aufzulösen versuchen: $x = f^{-1}(y)$. Für viele Funktionen, für die eine Umkehrfunktion existiert, wie etwa die exp-Funktion, ist das aber nicht so ohne weiteres möglich, weil f^{-1} nicht als geschlossener Ausdruck ausgerechnet werden kann. Viele dieser Funktionen spielen eine wichtige Rolle (weil sie eben bekannte Funktionen umkehren). Meist haben sie einen eigenen Namen erhalten (z.B. ln für $\exp^{-1}$) und wurden eingehend untersucht. Wir werden in Abschnitt II.3.1 Techniken kennenlernen, mit denen es möglich ist, Funktionswerte von Umkehrfunktionen zu berechnen. Überraschenderweise ist es oft einfach, die Ableitung einer Umkehrfunktion auszurechnen, auch wenn man die Umkehrfunktion selbst gar nicht so genau kennt (den Graphen von f^{-1} kennen wir aber immer, wenn wir den Graphen von f kennen).

(e) Die Schreibweise f^{-1} ist etwas mißverständlich, hat sich aber international eingebürgert. Unter f^{-1} ist **nicht** die Funktion $\frac{1}{f}$ zu verstehen, auch wenn die Schreibweise das nahelegt. Z.B. ist die Umkehrfunktion von $f(x) = x^3$ durch $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ und nicht etwa durch $\frac{1}{x^3}$ gegeben.

I.6.1 Bedingungen für die Existenz von f^{-1} Nicht jede Funktion besitzt eine Umkehrfunktion. Z.B. hat $f(x) = x^2$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$ sicher keine Umkehrfunktion, denn die Gleichung $y = f(x)$, also $y = x^2$, hat für positive y immer die beiden Lösungen $x_1 = \sqrt{y}$ und $x_2 = -\sqrt{y}$. Damit läßt sich die Frage nach dem x-Wert, der zu einem gegebenen y-Wert gehört nicht eindeutig beantworten. Diese Eindeutigkeit ist aber die notwendige Bedingung für die Existenz der Umkehrfunktion.

Wir geben nun eine hinreichende Bedingungen an, die für eine differenzierbare Funktion f sicherstellt, daß f^{-1} existiert. Dazu machen wir uns zunächst klar, daß eine stetige Funktion auf einem Intervall dann und nur dann umkehrbar ist, wenn sie entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist (für unstetige Funktionen stimmt das nicht mehr). Das bedeutet: Entweder gilt für zwei Werte x_1 und x_2 aus dem Definitionsbereich D_f mit $x_2 > x_1$ immer $f(x_2) > f(x_1)$ oder immer $f(x_2) < f(x_1)$. Wäre sie nämlich nicht entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend, so müßte es $x_1, x_2 \in D_f$

geben, für die $f(x_1) = f(x_2)$ gilt. Dann wäre aber f, im Widerspruch zu unserer Annahme, nicht mehr umkehrbar. Umgekehrt ist eine streng monoton wachsende oder fallende Funktion sicher umkehrbar, denn die Gleichung $y = f(x)$ kann keine zwei verschiedene Lösungen x_1 und x_2 haben. Sonst würde nämlich, wenn etwa $x_2 > x_1$ gilt, aus der strengen Monotonie sofort $f(x_2) > f(x_1)$ bzw. $f(x_2) < f(x_1)$, jedenfalls $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgen, im Gegensatz zu unserer Annahme $f(x_1) = y = f(x_2)$.

Mit Hilfe der Differentialrechnung können wir nun leicht eine hinreichende Bedingung für die Umkehrbarkeit einer Funktion angeben:

Eine Funktion f *auf einem Intervall ist sicher dann umkehrbar, wenn ihre Ableitung* f' *entweder positiv, oder negativ ist und allenfalls isolierte Nullstellen besitzt.*

Im Fall $f'(x) \geq 0$ wächst die Funktion permanent. An eventuell vorhandenen isolierten Nullstellen von f' findet kein Vorzeichenwechsel statt, so daß f dort einen Sattelpunkt besitzt (vergl. S. 30). f ist also streng monoton wachsend und daher umkehrbar. Entsprechendes gilt für $f'(x) \leq 0$ mit eventuell vorhandenen isolierten Nullstellen von f'. Ein einfaches Beispiel ist $f(x) = x^3$, mit $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ und der isolierten Nullstelle $x = 0$ von f', die zum Sattelpunkt im Ursprung führt.

I.6.2 Ableitung der Umkehrfunktion Ist eine Funktion f stetig differenzierbar und umkehrbar, so ist auch ihre Umkehrfunktion f^{-1} differenzierbar (diesen Satz wollen wir hier nicht beweisen). Überraschenderweise läßt sich eine Formel für die Ableitung von f^{-1} angeben, obwohl diese Funktion selbst möglicherweise gar nicht bekannt ist. Das liegt an Gleichung (I.24):

$$f(f^{-1}(x)) = x\,.$$

Leiten wir diese Gleichung auf beiden Seiten ab, so entsteht rechts 1, während wir die linke Seite mit der Kettenregel ableiten müssen und dabei

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

erhalten. In dieser Beziehung findet sich die Ableitung der Umkehrfunktion $(f^{-1})'$, die wir suchen – wir müssen die Gleichung also nur noch nach ihr auflösen:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\,. \tag{I.26}$$

Diese Gleichung sieht auf den ersten Blick etwas abschreckend aus. Bei näherer Betrachtung gibt sie uns aber eine klare Anweisung darüber, was wir im einzelnen zu tun haben, um f^{-1} abzuleiten. Wir müssen nämlich nur die Ausgangsfunktion f ableiten, dann in dem Ausdruck $f'(x)$ jedes x durch $f^{-1}(x)$ ersetzen und vom Ergebnis den Kehrwert bilden. Um dabei zu einem Ausdruck zu gelangen, den man auswerten kann, sucht man üblicherweise nach einem algebraischen Zusammenhang zwischen $f'(x)$ und $f(x)$. Was damit gemeint ist, machen wir uns am besten in den Beispielen klar.

Wir haben jetzt ein leistungsstarkes Werkzeug in der Hand, mit dem wir eine große Klasse von Funktionen auf Umkehrbarkeit untersuchen können. Wir müssen dazu nur die Ableitung ausrechnen und daraufhin untersuchen, ob sie entweder positiv oder negativ ist. Das wollen wir nun an den wichtigsten Beispielen durchführen.

I.6.3 Die ln-Funktion Die Exponentialfunktion $x \mapsto \exp(x) = e^x$ hat die Ableitung $\exp'(x) = e^x > 0$ und ist daher umkehrbar. Die Umkehrfunktion $\exp^{-1}$ muß sich aus der Lösung x der Gleichung $y = e^x$ ergeben. Es ist also für ein positives y (andere Werte kommen nicht als Funktionswerte von exp vor) die Potenz x von e gesucht, die beim Potenzieren gerade y ergibt. Das ist die Definition des Logarithmus zur Basis e von y: $x = \log_e(y)$. Da dieser Logarithmus die Umkehrfunktion einer der wichtigsten Funktionen ist, hat er ein eigenes Symbol erhalten: $\log_e = \ln$. Die Umkehrfunktion der exp-Funktion ist also durch ln gegeben: $\exp^{-1} = \ln$. Der Definitionsbereich von ln ist der Wertebereich der e-Funktion, also $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, während ihr Wertebereich $\mathbb{R}$ ist. Die e-Funktion besitzt die negative x-Achse als waagrechte Asymptote. Deshalb ist die negative y-Achse die senkrechte Asymptote der ln-Funktion. Gleichung (I.24) lautet für exp:

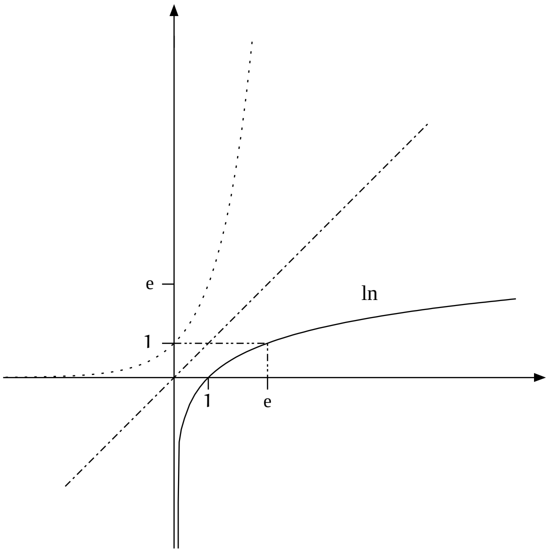


Abbildung I.24 *Die* ln-*Funktion*

$$\exp(\ln(x)) = e^{\ln(x)} = x\,, \qquad x > 0\,.$$

Als Ableitung von ln erhalten wir mit $\exp' = \exp$ nach Gleichung (I.26):

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}\,. \qquad \text{(I.27)}$$

Die ln-Rechenregeln ergeben sich als Umkehrung der Potenzrechengesetze (vergl. Seite 17) zu:

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)\,, \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)\,, \quad \ln(x^a) = a\,\ln(x)\,.$$

Insbesondere ist $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$.

I.6.4 Die Arcus-Funktionen $\sin' = \cos$. Die Cosinus-Funktion ist von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ größer oder gleich Null, d.h., die Ableitung von sin ist dort positiv, oder hat für $x = -\frac{\pi}{2}$ bzw. $x = \frac{\pi}{2}$ isolierte Nullstellen (vergl. Abbildung I.8). Damit ist die Sinus-Funktion in diesem Bereich umkehrbar. Die Umkehrfunktion $\sin^{-1}$ wird als *arcsin* bezeichnet. Ihr Definitionsbereich ist der Wertebereich der Sinus-Funktion, also $[-1, 1]$ und ihr Wertebereich $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Es gilt $\arcsin(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{2}$.

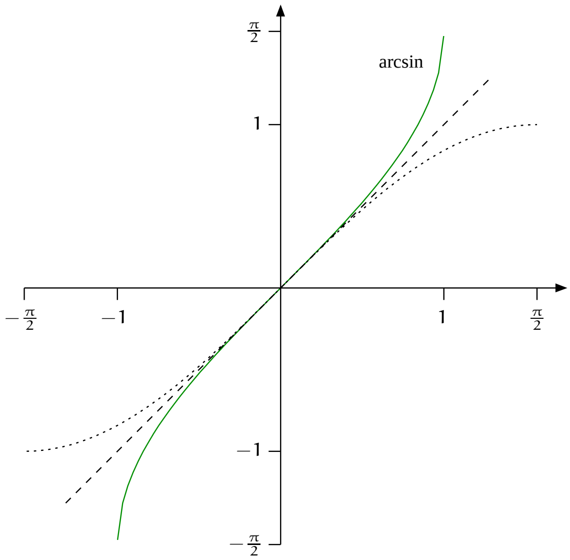


Abbildung I.25 *Die* arcsin-*Funktion*

Bilden wir ihre Ableitung: Gemäß Gleichung (I.26) müssen wir in die Ableitung von sin (also in cos) die Umkehrfunktion arcsin einsetzen und den Kehrwert bilden. Damit ist die Ableitung von arcsin

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}\,.$$

Damit können wir allerdings nicht viel anfangen. Wenn es uns aber gelingt, den cos mittels einer algebraischen Beziehung durch sin auszudrücken, dann können wir $\sin(\arcsin(x)) = x$ ausnützen (Gleichung (I.24)), um zu einer handlichen Formel für $\arcsin'$ zu gelangen. Der zentrale Zusammenhang $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ zwischen sin und cos (vergl. (I.3)) liefert uns diese Beziehung: $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$. Wir müssen nur noch die Wurzel aus beiden Seiten ziehen. Allerdings wissen wir, daß es dafür zwei Möglichkeiten gibt, nämlich $\pm\sqrt{1 - \sin^2(x)}$. Da der Cosinus positive und negative Werte annimmt, müssen wir uns darüber klar werden, welches Vorzeichen gelten muß. Glücklicherweise gilt aber $\cos \geq 0$ in dem Bereich $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, auf dem sin umkehrbar ist. Daher benötigen wir auf dem ganzen Bereich nur die positive Wurzel. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\cos(\arcsin(x)) &= \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}\\ &= \sqrt{1 - (\sin(\arcsin(x)))^2} = \sqrt{1 - x^2}\end{aligned}$$

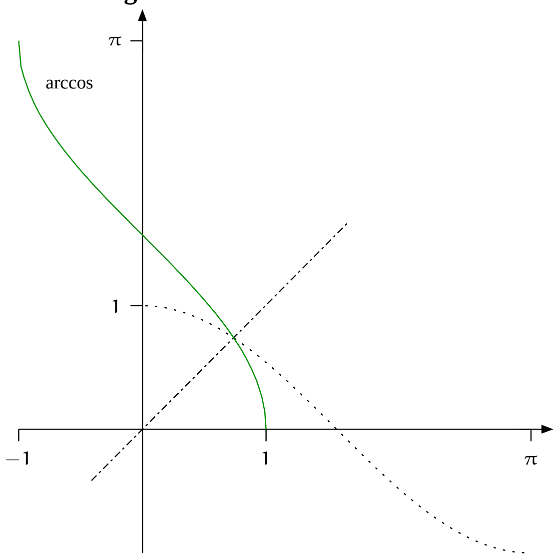


Abbildung I.26 *Die* arccos-*Funktion*

und daraus schließlich

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,. \tag{I.28}$$

Wenn wir genauso für den Cosinus verfahren, der im Bereich $[0, \pi]$ umkehrbar ist, dann erhalten wir für die Ableitung der Umkehrfunktion *arccos* von cos:

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,. \tag{I.29}$$

Der Tangens ist im Bereich $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ umkehrbar, denn $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ ist dort positiv (man beachte, daß nun die Randpunkte $\pm\frac{\pi}{2}$ nicht zum Intervall dazugehören, denn an diesen Stellen ist der Tangens gar nicht definiert). Verwenden wir die Beziehung $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ (nachrechnen), so erhalten wir für die Ableitung der Umkehrfunktion *arctan* von tan:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,. \tag{I.30}$$

I.6.5 Die Ableitung von $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{R}$ Mit Hilfe der ln-Funktion und der Beziehung $a = e^{\ln(a)}$ (Gl. (I.24)) können wir den Ausdruck x^n für positive x und *alle* $n \in \mathbb{R}$ definieren:

$$x^n = e^{n \ln(x)}\,. \tag{I.31}$$

Solange $n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$ oder $n \in \mathbb{Q}$ ist, brauchen wir diesen Trick nicht, denn in diesen Fällen läßt sich x^n mittels der bekannten Rechenoperationen bilden: Für $n = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ist

$$x^n = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}\,.$$

In diesen Fällen gilt aber auch die ln-Rechenregel $\ln(x^n) = n\ln(x)$, so daß die rechte Seite von (I.31) $e^{n\ln(x)}$ wieder $e^{\ln(x^n)} = x^n$, also (I.31) ergibt. Diese Gleichung liefert demnach für den Fall $n \in \mathbb{Q}$ wieder die alte Version von x^n zurück. Anders ist es, wenn wir $n = \sqrt{2}$ wählen. $x^{\sqrt{2}}$ läßt sich so nicht mehr über die bekannten Rechenoperationen Potenzieren und Wurzelziehen bilden, denn $\sqrt{2}$ ist kein Bruch, gehört also nicht mehr zu $\mathbb{Q}$. Nun müssen wir $x^{\sqrt{2}}$ durch $e^{\sqrt{2}\ln(x)}$ *definieren*. Genauso macht es (I.31) für alle $n \in \mathbb{R}$. Man kann zeigen, daß die Potenzrechengesetze (vergl. Seite 17) auch für diese erweiterte Definition von x^n gültig bleiben. Wir wollen uns nun davon überzeugen, daß die Ableitungsregel $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ auch weiterhin gilt. Dafür müssen wir nur noch (I.31) mit Hilfe der Kettenregel ableiten:

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}e^{n\ln(x)} = e^{n\ln(x)} \cdot n\ln'(x) = ne^{n\ln(x)}\frac{1}{x} = nx^n x^{-1} = nx^{n-1}\,.$$

I.6.6 Die Umkehrung der Hyperbelfunktionen

Bei den Hyperbelfunktionen handelt es sich um den hyperbolischen Sinus (*sinus hyperbolicus*)

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) , \tag{I.32}$$

den hyperbolischen Cosinus (*cosinus hyperbolicus*)

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) , \tag{I.33}$$

und den hyperbolischen Tangens (*tangens hyperbolicus*)

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{th}(x)} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \tag{I.34}$$

Offensichtlich gilt $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$, $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ und $\mathrm{th}' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2}$ (vergl. Seite 27). Ganz ähnlich wie bei den trigonometrischen Funktionen gibt es auch für die Hyperbelfunktionen eine zentrale algebraische Beziehung:

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1 . \tag{I.35}$$

Da $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist sh umkehrbar. sh^{-1} können wir berechnen. Dazu müssen wir die Gleichung

$$\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = y$$

nach x auflösen. Wir bringen alles auf eine Seite und multiplizieren anschließend die Gleichung mit e^x durch:

$$\begin{aligned} e^{x} - 2y - e^{-x} &= 0 \\ (e^{x})^2 - 2y\, e^{x} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Setzen wir darin $e^x = u$, so erhalten wir eine einfache quadratische Gleichung

$$u^2 - 2y\, u - 1 = 0$$

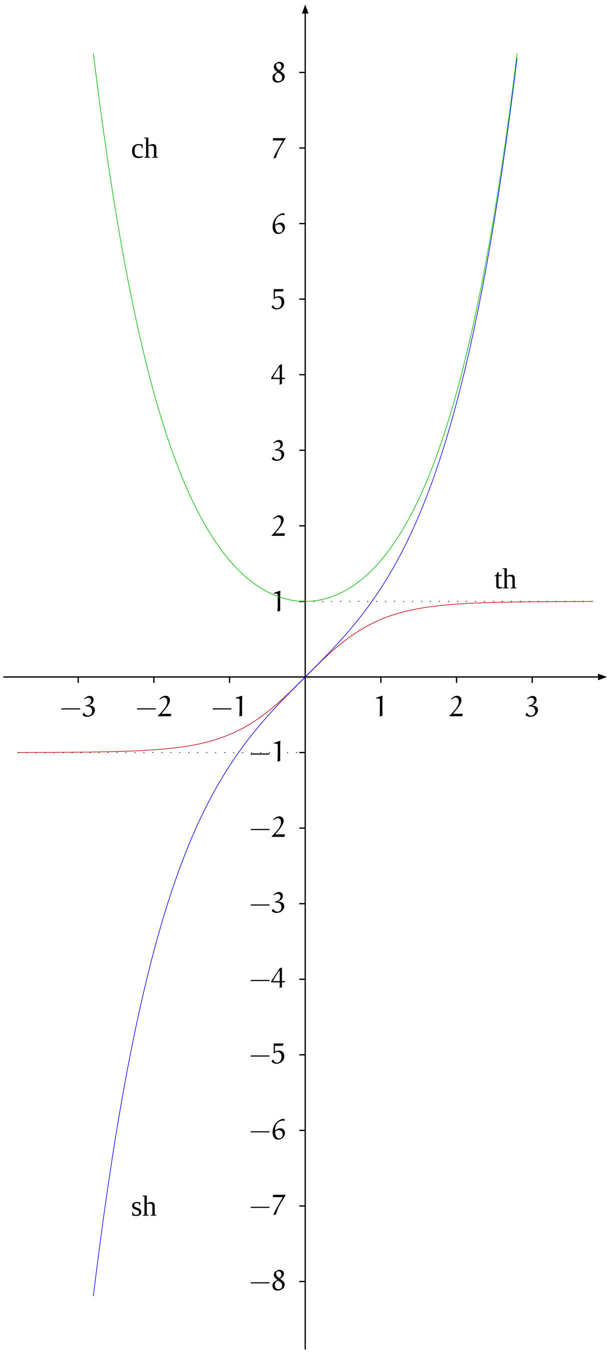


Abbildung I.27 *Die Hyperbelfunktionen*

mit den beiden Lösungen $u_{1/2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$. Da $u = e^x$ für alle $y \in \mathbb{R}$ positiv sein muß, kommt nur die '+'-Lösung in Frage ($\sqrt{y^2+1}$ ist nämlich größer als y, so daß $y - \sqrt{y^2+1}$ negativ ist):

$$u = y + \sqrt{y^2+1} = e^{x}$$

Nun müssen wir nur noch auf beiden Seiten die ln-Funktion anwenden und erhalten:

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right),$$

also

$$\mathrm{sh}^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

Da wir eine explizite Formel für die Umkehrfunktion des hyperbolischen Sinus erhalten haben, können wir die Ableitung direkt berechnen, indem wir die Kettenregel mehrfach anwenden:

$$\begin{aligned}(\mathrm{sh}^{-1})'(y) &= \frac{1}{\sqrt{y^2+1}+y} \cdot \left(\frac{y}{\sqrt{y^2+1}} + 1\right) = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}+y} \cdot \frac{y+\sqrt{y^2+1}}{\sqrt{y^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.\end{aligned}$$

Wir können aber auch wieder Gleichung (I.26) benutzen und dabei $\mathrm{ch} = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2}$ verwenden (vergl. Gl. (I.35)):

$$(\mathrm{sh}^{-1})'(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}'(\mathrm{sh}^{-1}(x))} = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{sh}^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(\mathrm{sh}^{-1}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Die Funktion ch können wir nur umkehren, wenn wir ihren Definitionsbereich auf $\mathbb{R}_0^+$ einschränken. Dann ergibt eine Rechnung, wie wir sie oben vorgeführt haben:

$$\mathrm{ch}^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

Dabei ist der Definitionsbereich $D_{\mathrm{ch}^{-1}} = [1,\infty)$. Als Ableitung erhalten wir für $x > 1$:

$$(\mathrm{ch}^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

th ist umkehrbar, denn die Ableitung $\frac{1}{\mathrm{ch}^2}$ ist strikt positiv. Die Umkehrfunktion bestimmen wir wieder durch Auflösung der Gleichung $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ (dabei haben wir den Bruch mit e^x erweitert). Wir erhalten zunächst $e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$ und daraus leicht

$$\mathrm{th}^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

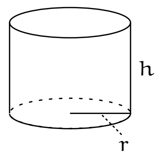
$D_{\mathrm{th}^{-1}} = (-1,1)$. Die Ableitung ist

$$(\mathrm{th}^{-1})'(y) = \frac{1}{1-y^2}.$$

I.7 Extremwertaufgaben

In vielen Gebieten der Technik, der Wirtschaft, der Naturwissenschaften usw. treten Probleme auf, die darauf hinauslaufen, eine Größe, in Abhängigkeit von einer Variablen zu maximieren oder zu minimieren. Die Techniken, solche Maxima bzw. Minima zu finden, haben wir in der Differentialrechnung und dort besonders bei der Kurvendiskussion von Funktionen bereits kennengelernt. Wir wollen nun an einigen Beispielen kurz beleuchten, wie solche Funktionen aus konkreten Beispielen gewonnen werden können. Wir bedienen uns dabei geometrischer Beispiele, weil sie die geringsten Spezialkenntnisse aus einem Gebiet erfordern. Die Aufgaben sind jeweils von demselben Typ: Wir suchen für eine Figur (Pyramide, Quader, Kegel, etc.) diejenige Geometrie, die bei einer gegebenen Oberfläche M (in der Fertigung z.B. eine gegebene Menge Material, die zur Verfügung gestellt wird) das größte Volumen V umschließt. Wir könnten bei diesen Aufgaben auch das Volumen konstant halten und die Oberfläche minimieren. Dabei ergibt sich immer eine Annäherung an das allgemeine Prinzip, demgemäß die optimale Figur, die bei gegebenem Volumen die kleinste Oberfläche besitzt, die Kugel ist (mehr oder minder deutlich, je nachdem, wie stark die geforderte geometrische Figur von der Kugelform abweicht).

I.7.1 Zylinder Zu gegebener Oberfläche M versuchen wir den Radius r und die Höhe h eines Zylinders so zu bestimmen, daß das Volumen V maximal wird. Dazu stellen wir zunächst beide Größen in Abhängigkeit von r und h dar:



Das Volumen eines Zylinders ist durch ‘Grundfläche·Höhe’ gegeben. Die Grundfläche ist eine Kreisscheibe, mit dem Flächeninhalt πr^2. Also ist $V(r,h) = \pi r^2 h$. Die Oberfläche setzt sich aus zwei Kreisscheiben mit Flächeninhalt πr^2 und einem Mantel zusammen, der durch ein Rechteck gegeben ist. Es hat die Höhe h und eine Grundlinie mit der Länge des Kreisumfangs $2\pi r$ des Grundkreises. Es besitzt demnach die Fläche $2\pi r h$. Damit ist die Oberfläche $M(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$.
Im Augenblick haben wir noch zwei Unbekannte, nämlich r und h. Da wir aber davon ausgehen, daß die Oberfläche durch eine konstante Zahl M festgelegt ist, lassen sich r und h nicht mehr unabhängig voneinander wählen. Wenn wir einen Radius r angeben, ist h bereits bestimmt. Wir brauchen nämlich nur

$$M = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

nach h auflösen, um das einzusehen:

$$h = \frac{M - 2\pi r^2}{2\pi r}.$$

Setzen wir das in die Gleichung für $V(r,h)$ ein, so erhalten wir nun eine Volumenfunktion, die nur noch von einer Variablen, nämlich r abhängt:

$$V(r) = \pi r^2 \frac{M - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{M}{2} r - \pi r^3\,.$$

Um den Radius r_0 maximalen Volumens zu finden, lösen wir zunächst $V'(r_0) = \frac{M}{2} - 3\pi r_0^2 = 0$ nach $r_0 > 0$ auf (der Radius muß natürlich eine positive Zahl sein). Wir erhalten

$$r_0 = \sqrt{\frac{M}{6\pi}}\,.$$

Wegen $V''(r_0) = -6\pi r_0 < 0$, und da in r_0 die einzige positive Stelle mit waagrechter Tangente ist, liegt in r_0 ein Maximum von V vor (vergl. Seite 32).
Als maximales Volumen erhalten wir:

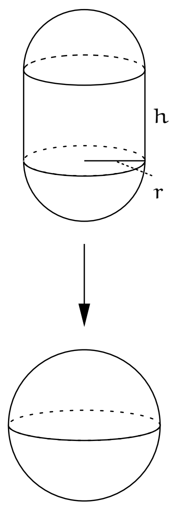
$$V(r_0) = r_0\Big(\frac{M}{2} - \pi r_0^2\Big) = r_0\Big(\frac{3M}{6} - \frac{M}{6}\Big) = r_0\frac{2\pi M}{6\pi} = 2\pi r_0\frac{M}{6\pi} = 2\pi r_0^3\,.$$

Aussagekräftiger ist aber das Verhältnis $\frac{h}{r_0}$, weil das die Geometrie des Zylinders festlegt:

$$\frac{h}{r_0} = \frac{M - 2\pi r_0^2}{2\pi r_0^2} = \frac{M - 2\pi\frac{M}{6\pi}}{2\pi\frac{M}{6\pi}} = \frac{M}{\frac{M}{3}} - 1 = 3 - 1 = 2\,.$$

Bei maximalem Volumen ist der Zylinder also so hoch wie breit: $h = 2r_0 = d$ (= Durchmesser).

I.7.2 Ein zusammengesetzter Körper Der Körper besteht aus einem Zylinder der Höhe h und zwei aufgesetzten Halbkugeln mit Radius r. Das Volumen ist demnach $V(r,h) = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$. Dabei ist $\frac{4}{3}\pi r^3$ das Volumen einer Kugel mit Radius r. $4\pi r^2$ ist die Oberfläche einer solchen Kugel, so daß die Oberfläche des Körpers durch $M(r,h) = 4\pi r^2 + 2\pi r h$ gegeben ist. Wir wählen wieder $M = M(r,h)$ konstant und lösen nach h auf:

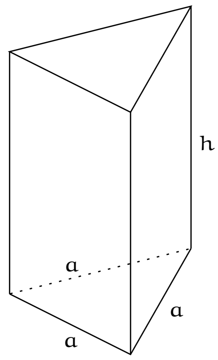


$$h = \frac{M - 4\pi r^2}{2\pi r}\,.$$

Das setzen wir in $V(r,h)$ ein und erhalten $V(r)$ und die Ableitungen zu

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{M}{2}r - 2\pi r^3 = \frac{M}{2}r - \frac{2}{3}\pi r^3\,,\\ V'(r) &= \frac{M}{2} - 2\pi r^2\,,\\ V''(r) &= -4\pi r\,. \end{aligned}$$

Die Gleichung $V'(r_0) = 0$ besitzt die einzige positive Lösung $r_0 = \sqrt{\frac{M}{4\pi}}$. $V''(r_0)$ ist negativ, so daß in r_0 tatsächlich ein Maximum von V vorliegt. Wenn wir r_0 in die Formel für h einsetzen, erhalten wir $h = 0$. D.h., der optimale Körper ist eine Kugel.



I.7.3 Prisma Gegeben ist ein dreiseitiges Prisma mit einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge a als Grundfläche (also mit dem Flächeninhalt $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$) und der Höhe h. Dann ist $V(a,h) = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}h$ und $M(a,h) = 2\frac{a^2}{4}\sqrt{3} + 3ah$. Für feste Oberfläche M erhalten wir also

$$h = \frac{M - \frac{\sqrt{3}}{2}a^2}{3a} = \frac{M}{3a} - \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

und damit

$$\begin{aligned} V(a) &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{M}{3}a - \frac{\sqrt{3}}{6}a^3\right), \\ V'(a) &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{M}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right), \\ V''(a) &= -\frac{3}{4}a\,. \end{aligned}$$

Die einzige positive Extremstelle liegt also bei $a_0 = \sqrt{\frac{2M}{3\sqrt{3}}}$. Wegen $V''(a_0) < 0$ handelt es sich um ein Maximum. Bestimmen wir noch $\frac{h}{a_0}$:

$$\frac{h}{a_0} = \frac{M}{3a_0^2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{M}{3\frac{2M}{3\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Also gilt $a_0 = \sqrt{3}h$. $V(a_0) = \frac{1}{4}\,a_0^3$.

II Integralrechnung

II.1 Das Flächenproblem

Wir formulieren das Flächenproblem zunächst in einer allgemeinen, eher intuitiven Weise:

Finde ein Verfahren zur Bestimmung des Flächeninhaltes von Flächen, die durch Kurven berandet sind.

In dieser allgemeinen Form wollen wir das Flächenproblem nicht untersuchen. Für die meisten Fälle läßt sich eine Flächenbestimmung durch geeignete Zerlegung der betrachteten Figur (siehe z.B. nebenstehende Skizze) auf des folgende Problem reduzieren:

Finde ein Verfahren zur Bestimmung einer Fläche, die durch den Ausschnitt des Graphen einer Funktion f und der x-Achse begrenzt wird.

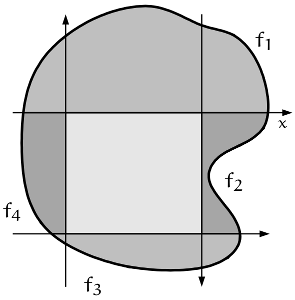
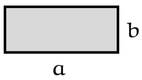


Abbildung II.1 *Zur Reduktion des Flächenproblems*

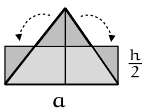
II.1.1 Flächeninhalte geometrischer Figuren Welche Flächen können wir bisher berechnen?

Rechtecke:



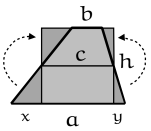
$F = a \cdot b\,.$

Dreiecke:



$F = \frac{1}{2}\,a \cdot h\,.$

Trapez:

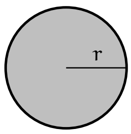


$F = \frac{1}{2}\,(a+b) \cdot h\,,$

denn $c = a - (x+y) = b + (x+y)$, also $x + y = c - b$ und damit $c = a - c + b$, oder $c = \frac{1}{2}(a+b)$.

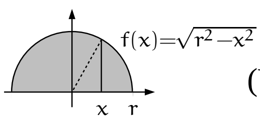
$\vdots$

Kreis:



$F = \pi \cdot r^2\,.$ (Wieso eigentlich?)

Reduktion auf eine Funktion:



(Vergleiche Seite 66.)

Den Kreis ausgenommen, können wir bisher eigentlich nur den Flächeninhalt von Figuren berechnen, die sich auf Rechtecke reduzieren lassen.

II.1.2 Die Fläche unter einer Kurve (Methode der *Riemann-Summen*)

Eingedenk unserer ernüchternden Beobachtung, daß wir bisher eigentlich nur in der Lage sind, den Flächeninhalt von Figuren auszurechnen, die sich (was ihren Flächeninhalt angeht) auf Rechtecke reduzieren lassen, machen wir aus der Not eine Tugend und bestimmen zunächst nur einen Näherungswert für die Fläche unter einer Kurve, indem wir sie durch Rechtecke annähern. Wie schon beim Tangentenproblem nehmen wir dabei einen Fehler in Kauf, in der Hoffnung, daß wir ihn im Nachhinein beliebig klein machen können und daß er nach einem Grenzübergang vollständig verschwindet.

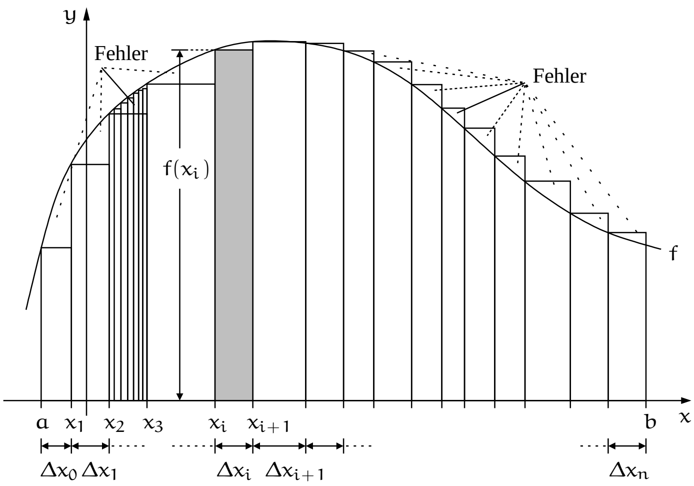
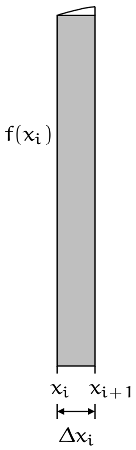


Abbildung II.2 *Methode der Riemann-Summen*

Dazu unterteilen wir das betrachtete Flächenstück unter der Funktion f in möglichst viele kleine Rechtecke der Basisbreite $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ und der Höhe $f(x_i)$. Dabei bilden die Punkte $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$ eine *Zerlegung* $\mathcal{Z}$ für das Basisintervall $[a, b]$ des Flächenstücks. Die *Feinheit* von $\mathcal{Z}$ ist die Länge der größten Basisbreite Δx_i. Wir bezeichnen sie mit $|\mathcal{Z}|$. Wenn wir die Feinheit $|\mathcal{Z}|$ kleiner machen, werden also alle Längen Δx_i kleiner. Gleichzeitig wird aber die Anzahl n der Unterteilungspunkte größer, denn bei kleineren Basisbreiten brauchen wir mehr von ihnen, um die Strecke von a bis b zu überdecken.



Der Fehler, den wir bei der Überdeckung mit Rechtecken gegenüber dem vermuteten wirklichen Flächeninhalt machen wird normalerweise kleiner, wenn wir die Zerlegung feiner wählen. Das ist für das Intervall $[x_2, x_3]$ angedeutet. Es wird also ein Grenzübergang durchzuführen sein, und zwar der Grenzübergang $|\mathcal{Z}| \to 0$, um die 'wirkliche' Fläche zu erhalten. Diese wollen wir vorläufig durch $F_{a,b}$ bezeichnen.

Bestimmen wir also den Flächeninhalt der Näherung. Dazu müssen wir nur die Flächen der Rechtecke mit der Basisbreite Δx_i und der Höhe $f(x_i)$, also $f(x_i)\Delta x_i$ von $i = 0$ bis $i = n$ addieren (Bildung der *Riemann-Summe*):

$$F_{a,b} \approx f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 \cdots + f(x_i)\Delta x_i + f(x_{i+1})\Delta x_{i+1} \cdots + f(x_n)\Delta x_n\,.$$

Um diesen etwas schwerfälligen Vorgang, der das Aufsummieren der Ausdrücke $f(x_i)\Delta x_i$ von $i = 0$ bis $i = n$ beschreibt, etwas übersichtlicher zu gestalten, hat es sich bewährt, die sog. *Summenschreibweise* zu benutzen: Statt der rechten Seite schreiben wir dabei

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i\,.$$

Dabei meint das Summenzeichen $\sum\limits_{i=0}^{n}$, daß in dem folgenden Ausdruck $f(x_i)\Delta x_i$ der *Sum-*

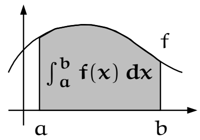
mationsindex i durch die Zahlen zwischen den angegebenen Grenzen von $i = 0$ bis $i = n$ (jeweils einschließlich) zu ersetzen ist und die dabei entstehenden Ausdrücke $f(x_0)\Delta x_0$, $f(x_1)\Delta x_1$, $f(x_2)\Delta x_3$ usw. bis $f(x_n)\Delta x_n$ aufzusummieren sind.

Nun können wir die Idee zur Berechnung der Fläche $F_{a,b}$ unter dem Graphen von f genauer fassen: $F_{a,b}$ *sollte der Grenzwert von* $\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ *für* $|\mathcal{Z}| \to 0$ *sein:*

$$F_{a,b} = \lim_{|\mathcal{Z}|\to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i \,.$$

Schreibweise: Statt $F_{a,b}$ schreiben wir

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx\,, \qquad \text{oder meist} \qquad \int_a^b f(x)\,dx\,.$$



Dabei ist das Integralzeichen $\int$ als stilisiertes ‘S’ (für ‘Summe’) anzusehen und $f(x)\,dx$ soll an die Herkunft $f(x_i)\Delta x_i$ in der Riemann-Summe $\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ erinnern:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\mathcal{Z}|\to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i \,. \tag{II.1}$$

$\int_a^b f(x)\,dx$ heißt *bestimmtes (Riemann-)Integral von* f *in den Grenzen von* $x = a$ *bis* $x = b$ und gibt (für positive Funktionen f) die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse, in den Grenzen a und b wieder. f heißt *Integrand*. Funktionen, für die das Integral in den Grenzen a und b existiert, nennen wir *(Riemann-)integrierbar* über $[a, b]$. Wenn eine Funktion über jedes endliche Intervall $[a, b]$ integrierbar ist, nennen wir sie *(Riemann-)integrierbar*. Mitunter verwenden wir statt x für die Integrationsvariable auch andere Zeichen, wie t, s, etc.. Das ist natürlich ohne weiteres möglich, denn ihrer Funktion nach ist die Integrationsvariable eine Summationsvariable, die nach Ausführung des Integrals verschwunden ist:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt\,.$$

Für welche Funktionen f läßt sich dieser Grenzwert denn nun prinzipiell bestimmen?

Satz. $\int_a^b f(x)\,dx$ *existiert für alle stetigen Funktionen und alle Funktionen, die sich stückweise aus stetigen Funktionen zusammensetzen.*

Diesen Satz nehmen wir zur Kenntnis, wir werden ihn aber nicht beweisen können. Für unsere Zwecke ist das auch gar nicht nötig. Seine Aufgabe besteht für uns einfach nur darin, sicherzustellen, daß es genügend viele Funktionen gibt, für die das Flächenproblem lösbar ist (tatsächlich gibt es noch mehr Funktionen, die sich nach der Methode der Riemann-Summen integrieren lassen). Als Methode, um konkrete Flächeninhalte auszurechnen, eignet sie sich allenfalls für numerische Flächenbestimmungen mit Hilfe eines

Computers. Selbst für einfachste Funktionen führt die Methode der Riemann-Summen nur sehr schwer zu Ergebnissen, da die auftretenden Summen ohne Computerunterstützung im Allgemeinen keine auswertbaren Ausdrücken ergeben. Wir wollen uns daher möglichst schnell nach einer alternativen Methode umsehen, die es uns in vielen Fällen gestatten wird, die Fläche unter einer Kurve formelmäßig zu bestimmen. Immerhin können wir bei unserer Suche nach dieser Methode nun das Objekt *Fläche unter einer Kurve* einsetzen, denn obiger Satz stellt uns dieses Objekt zur Verfügung. Bevor wir das tun, stellen wir noch die elementaren Eigenschaften des Riemann-Integrals zusammen:

(1) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$ (Additionsregel)

(2) $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$ (Faktorregel)

(3) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx.$ (Summenregel)

(4) $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$ (Positivität)

II.1.3 Stammfunktionen

Eine Funktion F *heißt* Stammfunktion *von* f, *falls sie differenzierbar und ihre Ableitung durch* f *gegeben ist:* $F' = f$.

Satz. *Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine Konstante.*

Beweis. F und G seien zwei Stammfunktionen von f. Es gilt also

$$F'(x) = f(x) = G'(x)$$

oder

$$F'(x) - G'(x) = (F - G)'(x) = 0.$$

Also ist $F - G$ eine Funktion, deren Ableitung überall verschwindet. Sie besitzt daher überall die Steigung Null. Da nur eine konstante Funktion diese Eigenschaft hat, folgt $F(x) - G(x) = c = \text{konst}$, d.h., $F(x) = G(x) + c$, was zu zeigen war. ☐

B

$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1}\,x^{n+1}$, $(n \neq -1)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$

$f(x)$	$F(x)$
e^x	e^x
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\lvert 1+x \rvert}{\lvert 1-x \rvert}\right)$

Tabelle II.1: Einige Stammfunktionen

Um uns davon zu überzeugen, daß diese Tabelle stimmt, müssen wir jeweils nur die Einträge in der $F(x)$-Spalte ableiten und nachrechnen, daß die Einträge der $f(x)$-Spalte entstehen: $\frac{d}{dx}\frac{1}{n+1}x^{n+1} = \frac{n+1}{n+1}x^{n+1-1} = x^n$ nach (I.31). $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ ist natürlich nur für diejenigen $n \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f(x) = x^n$, für die sich diese Formel überhaupt hinschreiben läßt. Für $n = -1$ ist das offensichtlich nicht mehr der Fall. Die Funktion $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ hat daher auch ihre eigene Regel zur Bildung der Stammfunktion. Man beachte, daß sie nicht durch $\ln(x)$ gegeben ist, wie (I.27) nahelegen könnte, denn in die ln-Funktion lassen sich nur positive Werte einsetzen, in $\frac{1}{x}$ aber auch negative. Um nachzuweisen, daß $F(x) = \ln(|x|)$ die gesuchte Stammfunktion ist, müssen wir nur $F' = f$ nachrechnen. Nun könnte man denken, daß diese Funktion gar nicht differenzierbar ist, denn $|x|$ ist nicht differenzierbar. Aber $|x|$ ist nur an der Stelle $x = 0$ nicht ableitbar, sonst jedoch überall. 0 ist auch der x-Wert, der die Definitionslücke von ln markiert – es besteht mithin gar keine Veranlassung, nach der Differenzierbarkeit von F an dieser Stelle zu fragen. Verwenden wir die Definition der *Betragsfunktion*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0\,, \\ -x & \text{für } x < 0\,, \end{cases}$$

so erhalten wir

$$\ln(|x|) = \begin{cases} \ln(x) & \text{für } x > 0\,, \\ \ln(-x) & \text{für } x < 0\,. \end{cases}$$

Für $x > 0$ zeigt (I.27) die Beziehung $\frac{d}{dx}\ln(|x|) = \frac{1}{x}$. Für $x < 0$ müssen wir sie noch zeigen. Dazu benutzen wir die Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}\ln(|x|) = \frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}\,.$$

Die Stammfunktionen für exp, sin und cos ergeben sich einfach aus den Ableitungsregeln (I.23), (I.21) und (I.22) dieser Funktionen, und die letzte Zeile der Spalte folgt sofort aus (I.28) und (I.30).

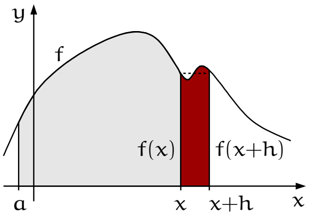
Damit kennen wir für einige wenige Funktionen eine Stammfunktion. Wir werden später Techniken kennenlernen, mit deren Hilfe wir auch für kompliziertere Funktionen Stammfunktionen finden können. Vorerst aber wollen wir den zentralen Satz formulieren und beweisen, der den Begriff Stammfunktion mit dem Flächenproblem in Beziehung setzt und so die Aufmerksamkeit rechtfertigt, die wir den Stammfunktionen bisher entgegengebracht haben.

Satz. (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Für eine stetige Funktion f *ist*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

eine Stammfunktion von f*, d.h., es gilt* $F' = f$.

Beweis. Den Beweis können wir in zwei Schritten führen. Im ersten Schritt stellen wir die Idee vor und kümmern uns nicht um die Details. Im zweiten Schritt gehen wir etwas mehr in die Tiefe.



Erster Schritt: Wir müssen zeigen, daß F differenzierbar ist und $F' = f$ gilt. Da wir vorerst noch keine Ableitungsregel für die Funktion F zur Verfügung haben, müssen wir uns auf die Definition der Ableitung zurückziehen. D.h., wir müssen versuchen, den Grenzwert des Differenzenquotienten auszurechnen:

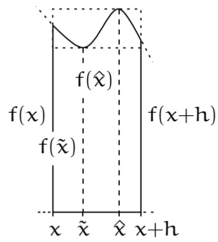
$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Das machen wir zunächst etwas informell, um die Idee zu verstehen: $F(x)$ ist die Fläche von a bis zu der variablen oberen Grenze x, also $F(x+h)$ die Fläche bis zu der (bei kleinem h) nah benachbarten Stelle $x+h$. Also ist $F(x+h) - F(x)$ die Fläche in dem schmalen Streifen von x bis $x+h$ (siehe nebenstehende Skizze). Für sehr kleines h (und wir wollen ja schließlich h gegen Null streben lassen) sind $f(x)$ und $f(x+h)$ kaum noch verschieden, da wir f als stetig angenommen haben. Damit machen wir keinen großen Fehler, wenn wir die tatsächliche Fläche $F(x+h)-F(x)$ durch das Rechteck mit der Höhe $f(x)$ und der Breite h ersetzen. Dieser Fehler wird tatsächlich beliebig klein, wenn wir h gegen Null streben lassen. Also gilt

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx \frac{f(x)\cdot h}{h} = f(x)\,.$$

Nun können wir verstehen, wieso man überhaupt auf die Idee kommen kann, in der Flächenfunktion $F(x)$ die Stammfunktion von f zu vermuten.

2. Schritt: Nachdem wir die Idee verstanden haben, können wir uns jetzt ihrer formalen Absicherung zuwenden. Wir benutzen dafür einen Satz über stetige Funktionen, den wir zwar nicht bewiesen haben, der aber anschaulich gut zu verstehen ist: *Jede stetige Funktion nimmt auf einem endlichen Intervall ein Maximum und ein Minimum an.* Für uns ist natürlich das Intervall $[x, x+h]$ von Interesse. $\widetilde{x}$ sei die Stelle, an der f ein Minimum annimmt und $\hat{x}$ die Stelle des Maximums. Dann verkleinern wir den tatsächlichen Flächeninhalt über dem Intervall $[x, x+h]$, wenn wir ihn durch den Flächeninhalt $f(\widetilde{x})\cdot h$ des einbeschriebenen Rechtecks mit der Höhe des minimalen Funktionswertes $f(\widetilde{x})$ ersetzen, und wir vergrößern ihn, wenn wir $f(\hat{x})\cdot h$, den Flächeninhalt des umfassenden Rechtecks mit der Höhe des Maximums $f(\hat{x})$ nehmen. Es gilt demnach:



$$\frac{f(\widetilde{x})\cdot h}{h} \le \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \le \frac{f(\hat{x})\cdot h}{h}\,.$$

Links steht natürlich einfach $f(\widetilde{x})$ und rechts $f(\hat{x})$, also

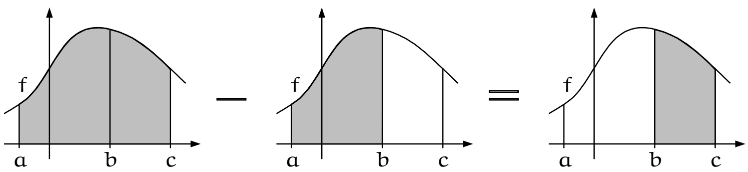
$$f(\widetilde{x}) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(\hat{x})\,.$$

Lassen wir nun h gegen Null streben, so wandert die rechte Seite $x + h$ des Intervalls $[x, x + h]$ gegen x und alle Punkte, die sich in diesem Intervall befinden, ebenfalls. Also streben auch $\widetilde{x}$ und $\hat{x}$ gegen x, und da f stetig ist, streben die Funktionswerte $f(\widetilde{x})$ und $f(\hat{x})$ gegen $f(x)$. Damit wird der Differenzenquotient $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ von zwei Ausdrücken nach unten und oben eingegrenzt, die beide gegen $f(x)$ streben. Dann muß er also ebenfalls gegen $f(x)$ streben:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)\,.$$

Das wollten wir zeigen. □

II.1.4 Flächenberechnung mittels Stammfunktionen Die Methode der Riemann-Summen ist eine ziemlich schwerfällige Methode, um konkrete Flächeninhalte auszurechnen. Das trifft natürlich um so mehr auf die Flächenfunktion $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ zu. Um sie nämlich zu kennen, müßten wir für jedes x die Methode der Riemann-Summen anwenden. Allerdings würde sie es uns ermöglichen, den Flächeninhalt, sagen wir von $x = b$ bis $x = c$, einfach als Differenz der Funktionswerte $F(c)$ und $F(b)$ zu erhalten:



$$F(c) \quad - \quad F(b) \quad = \quad \int_b^c f(t)\,dt\,.$$

Es lohnt sich also, nach einer alternativen Berechnungsmethode für F (genauer: für $F(c) - F(b)$) zu suchen. Inzwischen haben wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu unserer Verfügung. Wir wissen also, daß die Flächenfunktion F eine Stammfunktion von f ist. Darüberhinaus wissen wir auch, daß sich zwei Stammfunktionen allenfalls um eine Konstante unterscheiden. Für eine weitere Stammfunktion G von f gilt also $F(x) = G(x) + k$, mit einer Konstanten k. Diese Konstante kennen wir nicht, denn wir kennen ja die Flächenfunktion nicht. Die entscheidende Beobachtung ist nun aber, daß wir sie auch gar nicht kennen müssen, denn in der Differenz $F(c) - F(b)$ fällt sie heraus:

$$F(c) - F(b) = (G(c) + k) - (G(b) + k) = G(c) + k - G(b) - k = G(c) - G(b)\,.$$

In der Formel

$$\int_b^c f(t)\,dt = F(c) - F(b) \tag{II.2}$$

können wir daher *jede* Stammfunktion F von f nehmen, wir müssen nicht die schwer erreichbare Flächenfunktion wählen.

Damit haben wir die Berechnung von Flächen auf die Bestimmung von Stammfunktionen zurückgeführt.

Unsere mathematische Analyse hat uns dabei folgenden Weg zurücklegen lassen: Im ersten Schritt haben wir uns durch die Einführung der Riemann-Summen zur Approximation von Flächen und anschließendem Grenzübergang für eine große Klasse von Funktionen den Flächenbegriff verschafft. Damit hatten wir ein Werkzeug in der Hand, das zwar zu konkreten Rechnungen schwer zu gebrauchen war (außer für Rechenmaschinen natürlich), das sich für theoretische Überlegungen aber sehr gut eignete. So gewappnet konnten wir uns in einem zweiten Schritt auf die Suche nach einer Alternative zur schwerfälligen Riemann-Methode machen, die wir mit Hilfe der Stammfunktionen auch gefunden haben: Wir müssen zur Berechnung einer Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse in den Grenzen von b bis c zunächst eine Stammfunktion F von f finden, dann lediglich die beiden Grenzen einsetzen, und schließlich die Differenz $F(c) - F(b)$ bilden. Das schreiben wir in folgender Weise:

$$\int_b^c f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_b^c = F(c) - F(b)\,. \tag{II.3}$$

D.h., wir setzen in (II.2) die Integrationsgrenzen nicht sofort ein, denn auf diese Weise hätten wir bei konkreten Funktionen nur die wenig anschauliche Zahl $F(c) - F(b)$ vorzuweisen, der man keine Information über die Stammfunktion mehr ansieht. Durch die Schreibweise $[F(t)]_b^c$ haben wir die volle Information, nämlich die über die Stammfunktion und die Grenzen.

Der enge Zusammenhang zwischen Integral und Stammfunktion drückt sich auch in der oft bequem einsetzbaren Schreibweise

$$\int f(x)\,dx$$

für die Stammfunktion F von f aus. Diesen Ausdruck nennt man auch *unbestimmtes Integral* von f. Insbesondere gilt also

$$\int f'(x)\,dx = f(x)\,, \tag{II.4}$$

denn die Stammfunktion von f' ist natürlich wieder f.

$\boxed{\text{B}}$ Wir wenden unsere Erkenntnisse auf ein paar Funktionen der Tabelle II.1 an:

(1) $\displaystyle\int_0^2 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = \frac{1}{4}2^4 = 4\,.$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^2 e^x\,dx = \Big[e^x\Big]_{-2}^2 = e^2 - \frac{1}{e^2}\,.$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(t)\,dt = \Big[-\cos(t)\Big]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0\,.$

(4) $\displaystyle\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \Big[\arcsin(x)\Big]_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} = \arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin(-1+\varepsilon) = 2\arcsin(1-\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 2\,\frac{\pi}{2} = \pi\,.$

Wir haben die Grenzen -1 und 1, an denen wir eigentlich interessiert sind, nicht direkt einsetzen können, weil der Integrand $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ an diesen Stellen nicht definiert ist. Daher haben wir uns mit der Zahl $\varepsilon > 0$ einen respektvollen Abstand zu dieser Definitionslücke verschafft und versucht, diesen nach der Integration durch den Grenzübergang $\varepsilon \longrightarrow 0$ wieder zum Verschwinden zu bringen (die Funktion arcsin ist stetig). Dabei haben wir den Flächeninhalt bestimmt, der von der Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, der x-Achse und den senkrechten Asymptoten bei -1 und 1 begrenzt wird. D.h., wir haben einen endlichen Flächeninhalt für die unendlich ausgedehnte Fläche zwischen Kurve und senkrechter Asymptote erhalten (zeichnen!).

Wie wir sehen, liefert Beispiel (3) nicht gerade das gewünschte Ergebnis. Die Fläche, die die Sinus-Funktion mit der x-Achse in den Grenzen von 0 bis 2π einschließt, ist sicherlich nicht 0. Was ist falsch gelaufen?

Wir haben uns von einer Idee zur Flächenberechnung mittels Riemann-Summen $\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$ leiten lassen. Dabei tragen die einzelnen Flächenstücke $f(x_i)\Delta x_i$ mehr Information, als nur den Flächeninhalt. Mit dem Vorzeichen von $f(x_i)$ wird auch noch angezeigt, ob sich die Fläche oberhalb, oder unterhalb der x-Achse befindet. Deshalb wird eine Fläche, die unterhalb der x-Achse liegt mit einem negativen Vorzeichen auftreten. Das müssen wir berücksichtigen, wenn wir an der Fläche einer Funktion interessiert sind, die Anteile oberhalb und unterhalb der x-Achse hat. Am einfachsten geschieht das, indem wir nicht über Nullstellen von Funktionen hinwegintegrieren, sondern uns sozusagen von Nullstelle zu Nullstelle hangeln und die *Beträge* der dabei entstehenden positiv und negativ gerechneten Flächeninhalte addieren. Für das Sinus-Beispiel könnte das folgendermaßen aussehen:

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^{\pi} \sin(t)\,dt\Big| + \Big|\int_{\pi}^{2\pi} \sin(t)\,dt\Big| &= \Big|\Big[-\cos(t)\Big]_0^{\pi}\Big| + \Big|\Big[-\cos(t)\Big]_{\pi}^{2\pi}\Big| \\ &= \Big|-\cos(\pi)+\cos(0)\Big| + \Big|-\cos(2\pi)+\cos(\pi)\Big| \\ &= \big|2\big| + \big|-2\big| = 4\,.\end{aligned}$$

Nachdem wir die Flächenberechnung im Wesentlichen auf das Finden von Stammfunktionen zurückgeführt haben, benötigen wir jetzt leistungsfähige Integrationstechniken, um unseren Bestand an integrierbaren Funktionen aufzustocken.

II.2 Integrationstechniken

Zu der Produkt- und der Kettenregel gibt es eine korrespondierende Integrationsregel, nämlich die *Produktiontegration* und die *Substitution*.

II.2.1 Die Produktiontegration Die Produktegel der Ableitung lautet

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' . \tag{II.5}$$

Wenden wir darauf die einfache Beobachtung, daß die Stammfunktion von f' gerade f ist an, daß also das Integral von f' die Ausgangsfunktion f liefert,

$$\int f'(x)\,dx = f(x)\,,$$

so ergibt sich aus (II.5) durch Integration auf beiden Seiten:

$$u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x)\,dx + \int u(x) \cdot v'(x)\,dx\,.$$

Wir stellen das nach einem der Integrale um und erhalten bereits die Formel für die *Produktintegration* (auch als *partielle Integration* bezeichnet)

$$\int u'(x) \cdot v(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\,dx\,, \tag{II.6}$$

oder, in etwas übersichtlicherer Schreibweise:

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v' . \tag{II.7}$$

Was fangen wir nun mit dieser Formel an? Am besten erlernt man diese Integrationstechnik an konkreten Anwendungsbeispielen.

Wir fangen mit einem Standardbeispiel an:

$$\int x \sin(x)\,dx\,.$$

Wenn wir (II.7) anwenden wollen, müssen wir eine der beiden Faktoren, x oder $\sin(x)$ als u' deklarieren. Da (II.7) auf der rechten Seite die Angabe von $u \cdot v$ verlangt, müssen wir die Stammfunktion u von u' angeben können. Das müssen wir bei unserer Wahl berücksichtigen. Im vorliegenden Beispiel ist das aber kein Problem, denn wir können beide Faktoren problemlos integrieren (x liefert $\frac{1}{2}x^2$ und $\sin(x)$ ergibt $-\cos(x)$). Wir entscheiden uns für $u'(x) = \sin(x)$. Dann erhalten wir

$$\begin{array}{lllll}\int x\sin(x)\,dx = & x(-\cos(x)) & -\int 1\cdot(-\cos(x))\,dx & = -x\cos(x)+\int\cos(x)\,dx\,. \\ \int v\ \ u' \quad = & v \quad\ u & -\int v'\ \ u & \end{array}$$

Erfolg haben wir mit unserer Wahl, wenn wir das Integral auf der rechten Seite lösen können. Das ist hier der Fall, denn $\int\cos(x)\,dx = \sin(x)$. Damit haben wir die Stammfunktion von $x \mapsto x\sin(x)$ gefunden:

$$\int x\sin(x)\,dx = -x\cos(x) + \sin(x)\,.$$

Wir können uns immer davon überzeugen, daß wir richtig gerechnet haben:

$$\frac{d}{dx}(-x\cos(x)+\sin(x)) = -\cos(x) + x\sin(x) + \cos(x) = x\sin(x)$$

(natürlich unter Verwendung der Produktregel). Die Funktion $x \mapsto -x\cos(x) + \sin(x)$ ist also tatsächlich eine Stammfunktion von $x \mapsto x\sin(x)$. Wir wollen an diesem Beispiel auch demonstrieren, wie eine schlechte Wahl von u und v ausgesehen hätte und woran man das erkennt: Für $u'(x) = x$ und $v(x) = \sin(x)$ erhalten wir

$$\int x\sin(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\sin(x) - \frac{1}{2}\int x^2\cos(x)\,dx\,.$$

Jetzt ist das zweite Integral durch den Faktor x^2 statt x noch schwerer zu lösen, als das Ausgangsintegral.

B (1) $\displaystyle\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x\,.$

Dabei haben wir $u'(x) = e^x$ und $v(x) = x$ gewählt.

(2) $\displaystyle\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx = x^2e^x - 2(x-1)e^x = (x^2-2x+2)e^x\,.$

$(u'(x) = e^x, v(x) = x^2)$

(3)
$$\begin{aligned}\int e^x\sin(x)\,dx &= e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)\,dx \\ &= e^x\sin(x) - e^x\cos(x) - \int e^x\sin(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Wir haben die Produktintegration zweimal angewendet: Das erste mal mit $u'(x) = e^x$ und $v(x) = \sin(x)$ und das zweite mal mit $u'(x) = e^x$ und $v(x) = \cos(x)$. Damit haben wir scheinbar nichts gewonnen, weil sich unser gesuchtes Integral reproduziert hat. Entscheidend ist aber, daß es mit einem *negativen* Vorzeichen entstanden ist, denn so können wir die Gleichung einfach nach dem gewünschten Integral auflösen:

$$2\int e^x\sin(x)\,dx = (\sin(x)-\cos(x))e^x\,,$$

also

$$\int e^x \sin(x)\,dx = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))e^x\,.$$

(4)
$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)\,dx &= \int \sin(x)\sin(x)\,dx\\ &= -\cos(x)\sin(x) + \int \cos^2(x)\,dx\\ &= -\cos(x)\sin(x) + \int (1-\sin^2(x))\,dx\\ &= -\cos(x)\sin(x) + x - \int \sin^2(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Wir haben $u'(x) = \sin(x)$ und $v(x) = \cos(x)$ gesetzt. In der zweiten Gleichung machen wir dann von der zentralen Beziehung (I.3), $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, Gebrauch. Dabei reproduziert sich unser Ausgangsintegral, nach dem wir (wie oben) auflösen:

$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))\,.$$

Daraus folgt nun leicht

$$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))\,.$$

(5)
$$\begin{aligned}\int x\ln(x)\,dx &= \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{2}\int x^2\frac{1}{x}\,dx\\ &= \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx\\ &= \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2\,.\end{aligned}$$

Hier haben wir, anders als bisher, $u'(x) = x$ und $v(x) = \ln(x)$ gesetzt. Dann taucht im zweiten Integral natürlich $u(x) = \frac{1}{2}x^2$ auf, was wir bisher immer vermeiden wollten. Aber, da die Ableitung von $\ln(x)$ ja einfach $\frac{1}{x}$ ist, entsteht auf diese Weise trotzdem ein leicht zu berechnendes Integral.

(6)
$$\begin{aligned}\int \ln(x)\,dx &= \int 1\cdot\ln(x)\,dx\\ &= x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}\,dx\\ &= x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x\,.\end{aligned}$$

Wir haben den Trick angewandt, $u'(x) = 1$ und $v(x) = \ln(x)$ zu setzen.

(7)
$$\begin{aligned}\int \ln^2(x)\,dx &= \int \ln(x)\cdot\ln(x)\,dx\\ &= (x\ln(x) - x)\ln(x) - \int (x\ln(x) - x)\frac{1}{x}\,dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (x\ln(x) - x)\ln(x) - \int (\ln(x) - 1)\,dx \\ &= (x\ln(x) - x)\ln(x) - x\ln(x) + x + x \\ &= x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x\,. \end{aligned}$$

Ü Überzeugen Sie sich durch Ableiten, daß in den Beispielen tatsächlich die Stammfunktionen gefunden wurden.

Die Produktintegration läßt sich natürlich auch für bestimmte Integrale formulieren:

$$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx = \big[u(x)\cdot v(x)\big]_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx\,. \tag{II.8}$$

B $\int_0^1 xe^x\,dx = \big[xe^x\big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = \big[xe^x\big]_0^1 - \big[e^x\big]_0^1 = e - (e-1) = 1\,.$

Normalerweise sollte man aber so vorgehen, daß man zunächst das unbestimmte Integral löst, also die Stammfunktion angibt und dann die Grenzen einsetzt. Auf diese Weise hat man Integrationsfehlern gegenüber mehr Kontrolle. Denn eine vermeintliche Stammfunktion kann einfach durch Ableiten auf ihre Richtigkeit hin überprüft werden.

In unseren Beispielen haben wir gesehen, daß man mitunter etwas probieren muß, bis man den richtigen Ansatz zur Lösung des Integrals gefunden hat. Trotzdem kann es passieren, daß ein Integral, dessen Integrand als Produkt auftritt, nicht mit der Produktintegration gelöst werden kann. Ein Beispiel ist $\int xe^{-x^2}\,dx$, das sich der Produktintegration gegenüber als resistent erweist, jedoch mit der Substitutionsmethode gelöst werden kann.

II.2.2 Die Substitutionsmethode ist die Integrationsmethode, die zur Kettenregel korrespondiert. Sie beruht auf folgender einfachen Beobachtung:

Ist F die Stammfunktion von f, also gilt $F' = f$, dann ist $F\circ u$ die Stammfunktion von $(f\circ u)\cdot u'$. Denn nach der Kettenregel gilt

$\frac{d}{dx}F\circ u(x) = \frac{d}{dx}F(u(x)) = F'(u(x))\cdot u'(x) = f(u(x))\cdot u'(x)\,.$

Also folgt

$$\int f(u(x))\cdot u'(x)\,dx = F(u(x))\,. \tag{II.9}$$

Für das bestimmte Integral erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\,dx &= \int_a^b \frac{d}{dx}F(u(x))\,dx = \big[F(u(x))\big]_a^b \\ &= F(u(b)) - F(u(a)) = \big[F(t)\big]_{u(a)}^{u(b)} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt\,, \end{aligned}$$

also

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt\,. \tag{II.10}$$

B Wir machen den Gebrauch dieser Methode wieder an einem Beispiel deutlich: Wir suchen die Stammfunktion

$$\int \frac{3x}{2x^2+4}\,dx\,.$$

Um Gleichung (II.9) anwenden zu können, müssen wir f und u bestimmen. Wir wählen $f(t) = \frac{1}{t}$ (also $F(t) = \ln(|t|)$) und $u(x) = 2x^2+4$. Es ist $f(u(x)) = \frac{1}{2x^2+4}$, also bis auf den Faktor $3x$ der Integrand unseres Integrals. $u'(x) = 4x$, so daß $f(u(x))u'(x) = \frac{4x}{2x^2+4}$. Das ist nicht genau unser Integrand, denn der Faktor 4 im Zähler stimmt nicht. Aber das läßt sich reparieren:

$$\int \frac{3x}{2x^2+4}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{4x}{2x^2+4}\,dx = \frac{3}{4}\int f(u(x))u'(x)\,dx = \frac{3}{4}F(u(x)) = \frac{3}{4}\ln(2x^2+4)\,.$$

Das Betragszeichen in $\ln(\ldots)$ ist hier wegen $2x^2+4 > 0$ überflüssig.

Üblicherweise geschieht die Anwendung der Substitutionsmethode in formalerer Weise. Der Leitfaden dafür ist die folgende formale Rechnung:

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int f(u)\,du\,.$$

D.h., wir versuchen in unserem Ausgangsintegral einen bestimmtem Ausdruck durch die Variable u zu ersetzen, also aus dem Integral in der Variablen x ein Integral in der Variablen u zu machen. Dabei muß insbesondere dx in du umgerechnet werden. Vergleichen wir die linke und die rechte Seite in obiger Gleichung, dann muß $u'(x)\,dx$ durch du ersetzt werden. Das formalisiert man, indem man für u' den Ausdruck $\frac{du}{dx}$ verwendet und diesen nach du 'auflöst' (dieser Vorgang ist der eigentlich formale, denn dx und dy sind symbolische Objekte, keine Zahlen, mit denen wir so ohne weiteres rechnen können – trotzdem liefert der beschriebene Vorgang die 'richtige' Merkregel). Für das oben angeführte Beispiel sieht das folgendermaßen aus:

In $\int \frac{3x}{2x^2+4}\,dx$ substituieren wir $u = 2x^2+4$. Dann ist $\frac{du}{dx} = 4x$, also $4x\,dx = du$. Vergleichen wir mit unserem Integral, so sehen wir, daß $3x\,dx$ schon vorgebildet ist. Das können wir durch $\frac{3}{4}\,du$ ersetzen. Damit haben wir insgesamt

$$\int \frac{3x}{2x^2+4}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{3}{4}\ln(|u|) = \frac{3}{4}\ln(|2x^2+4|) = \frac{3}{4}\ln(2x^2+4)\,.$$

Ist unser Ausgangsintegral ein bestimmtes Integral, also etwa $\int_0^2 \frac{3x}{2x^2+4}\,dx$, so stehen uns zwei Wege zur Lösung offen. Der erste besteht darin, wie oben beschrieben die Stammfunktion auszurechnen und danach die Grenzen einzusetzen. Das ist üblicherweise zu empfehlen, denn man hat dabei Rechenfehlern gegenüber die bessere Kontrolle. Man kann aber auch gleich das bestimmte Integral berechnen. Dabei müssen wir dann jedoch auch die x-Grenzen des Ausgangsintegrals in die u-Grenzen der substituierten Version umrechnen. Das ist nicht schwer, denn wenn $x = 0$ ist, ist u einfach durch Einsetzen zu erhalten: $u(0) = 4$. Genauso gehört zu $x = 2$ die Grenze $u(2) = 2 \cdot 2^2 + 4 = 12$. Also

$$\int_0^4 \frac{3x}{2x^2+4}\,dx = \frac{3}{4}\int_4^{12} \frac{1}{u}\,du = \frac{3}{4}\Big[\ln(|u|)\Big]_4^{12} = \frac{3}{4}(\ln(12) - \ln(4)) = \frac{3}{4}\ln(\frac{12}{4}) = \frac{3}{4}\ln(3)\,.$$

Das ist die Rechenmethode, die zu (II.10) gehört.

$\boxed{\text{B}}$ (1) $\int xe^{-x^2}\,dx$: Wir substituieren $u = -x^2$. Dann gilt: $u' = \frac{du}{dx} = -2x$, also $x\,dx = -\frac{1}{2}du$:

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^u\,du = -\frac{1}{2}e^u = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\,.$$

(2) $\int \frac{1}{t}\ln(t)\,dt$: Wir setzen $u = \ln(t)$ und erhalten mit $\frac{du}{dt} = \frac{1}{t}$, also $du = \frac{1}{t}\,dt$, das Integral

$$\int \frac{1}{t}\ln(t)\,dt = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}\ln^2(t)\,.$$

(3) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$: Nach einigem Probieren findet man eine günstige Substitution, nämlich $u = \sqrt{x^2-1}$. Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir $\frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, also $dx = \frac{u}{x}\,du$. Für unser Integral benötigen wir $\frac{1}{x}\,dx = \frac{u}{x^2}\,du$. Quadrieren wir $u = \sqrt{x^2-1}$ und lösen nach x^2 auf: $x^2 = u^2 + 1$. Damit ist $\frac{1}{x}\,dx = \frac{u}{u^2+1}\,du$, und unser Integral wird zu

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx &= \int u\,\frac{u}{u^2+1}\,du = \int \frac{u^2}{u^2+1}\,du = \int \frac{u^2+1-1}{u^2+1}\,du \\ &= \int du - \int \frac{1}{u^2+1}\,du = u - \arctan(u) \qquad \text{(siehe Tabelle II.1)} \\ &= \sqrt{x^2-1} - \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right).\end{aligned}$$

Es ist eine gute Übung, durch Ableiten nachzurechnen, daß es sich hierbei tatsächlich um eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ handelt.

II.2.3 Die Logarithmus-Regel

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\left(|f(x)|\right).$$

Wir bestätigen sie, indem wir die rechte Seite mit Hilfe der Kettenregel ableiten. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) < 0$ gilt: $\ln\left(|f(x)|\right) = \ln\left(-f(x)\right)$. Die Ableitung ist

$$\frac{d}{dx}\ln\left(-f(x)\right) = \frac{1}{-f(x)} \cdot (-f'(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}\,.$$

Dieses Ergebnis erhalten wir auch für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) > 0$.

Die Möglichkeiten dieser Formel sieht man wieder am besten an den Beispielen.

$\boxed{\text{B}}$ (1) $\displaystyle\int \frac{3x}{4x^2-2}\,dx = \frac{3}{8}\int \frac{8x}{4x^2-2}\,dx = \frac{3}{8}\ln\left(\left|4x^2-2\right|\right).$

Der Zähler $3x$ des Bruchs war nicht genau die Ableitung $8x$ des Nenners $4x^2 - 2$. Allerdings haben wir das entscheidende x vorgefunden, so daß wir den Vorfaktor korrigieren konnten, indem wir die Zahl 8 ergänzten.

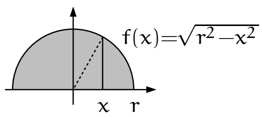
(2) $\displaystyle\int \tanh(x)\,dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \ln(e^x + e^{-x}).$

(3) $\displaystyle\int \tan(x)\,dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\ln(|\cos(x)|) = -\frac{1}{2}\ln(\cos^2(x)).$

(4) $$\int \frac{5}{2-4e^{-4x}}\,dx = \int \frac{5}{2-4e^{-4x}}\cdot\frac{e^{4x}}{e^{4x}}\,dx = \int \frac{5e^{4x}}{2e^{4x}-4}\,dx = \frac{5}{8}\int \frac{8e^{4x}}{2e^{4x}-4}\,dx$$
$$= \frac{5}{8}\ln\left(\left|2e^{4x}-4\right|\right).$$

Dieses Integral haben wir in zwei Schritten angepaßt. Im ersten Schritt haben wir durch Erweitern mit e^{4x} dafür gesorgt, daß im Zähler bis auf einen Vorfaktor die Ableitung des Nenners steht. Im zweiten Schritt haben wir auf die übliche Weise, also wie in (1), den Vorfaktor korrigiert.

In manchen Situationen ist es vorteilhaft, wenn man in einem Integral $\int f(x)\,dx$ nicht einen Ausdruck durch eine Variable u, sondern x durch einen Ausdruck ersetzt, um so z.B. eine bestimmte algebraische Relation auszunutzen. Wir verdeutlichen das an einem Beispiel.



Die Berechnung der Kreisfläche führt auf das Integral

$$2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx.$$

Die algebraische Relation, die wir ausnutzen wollen, ist die zentrale Beziehung (I.3) zwischen Sinus und Cosinus: $\sin^2(u) + \cos^2(u) = 1$. Dafür setzen wir $x = r\sin(u)$. Dann ist $\sqrt{r^2-x^2} = \sqrt{r^2 - r^2\sin^2(u)} = r\sqrt{1-\sin^2(u)} = r\sqrt{\cos^2(x)}$. Betrachten wir die Grenzen: Für $x = -r$ muß $-r = r\sin(u)$, also $-1 = \sin(u)$ gelten, d.h., $u = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ (vergl. Abbildung I.8). Für $x = r$ folgt die u-Grenze ebenso: $u = \frac{\pi}{2}$. In dem Bereich von $u = -\frac{\pi}{2}$ bis $u = \frac{\pi}{2}$ ist $\cos(u)$ positiv, so daß wir aus $\sqrt{\cos^2(u)}$ die positive Wurzel $\cos(u)$ ziehen können. Nun müssen wir noch dx in du umrechnen. Dazu leiten wir x nach u ab: $\frac{dx}{du} = r\cos(u)$, also $dx = r\cos(u)\,du$. Jetzt haben wir alles beisammen und können die Substitution durchführen und damit die Fläche des Kreises bestimmen:

$$2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos(u)\cdot r\cos(u)\,du = 2r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(u)\,du$$

$$= r^2\Big[u + \sin(u)\cos(u)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = r^2\Big(\frac{\pi}{2} - \big(-\frac{\pi}{2}\big)\Big) = \pi r^2 .$$

II.3 Anwendungen

II.3.1 Taylor-Entwicklung Die Taylor-Entwicklung stellt eine Methode dar, mit deren Hilfe es möglich ist, die Funktionswerte vieler Funktionen, wie sin, cos, exp, ... in beliebiger Genauigkeit zu berechnen. Wir verschaffen uns die Taylor-Formel mittels Produktintegration. Unser Ziel ist es dabei, die Funktionswerte $f(x)$ einer Funktion f in einer Umgebung eines geeigneten Punktes x_0 beliebig genau durch Summen von Potenzen $(x - x_0)^n$ auszudrücken. Wir starten mit der Formel

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt\,,$$

also

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt\,. \tag{II.11}$$

Nun formen wir das Integral $\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} 1 \cdot f'(t)\,dt$ mittels Produktintegration um. Dabei wählen wir für $u'(t)$ die Zahl 1 und für die von (II.7) geforderten Stammfunktion u die Funktion $t - x$. $v(t)$ ist dann natürlich $f'(t)$. Dabei machen wir uns noch einmal klar, daß wir bzgl. der Variablen t integrieren, so daß x wie eine gewöhnliche Konstante behandelt wird. Hier haben wir sie als die Zahl genommen, die wir zu jeder Stammfunktion hinzuaddieren dürfen:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt &= \Big[(t-x)f'(t)\Big]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} (t-x)f''(t)\,dt \\ &= -(x_0 - x)f'(x_0) - \int_{x_0}^{x} (t-x)f''(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

In der nächsten Runde wählen wir $u'(t) = (t-x)$, $u(t) = \frac{1}{2}(t-x)^2$ (nachrechnen mittels Kettenregel) und $v(t) = f''(t)$. Wir setzen alles in (II.11) ein und erhalten

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \\ &\quad - \Big[\frac{1}{2}(t-x)^2 f''(t)\Big]_{x_0}^{x} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} (t-x)^2 f'''(t)\,dt \\ &= f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x_0 - x)^2 f''(x_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} (t-x)^2 f'''(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

Wir fahren auf diese Weise fort: Jetzt ist $u'(t) = \frac{1}{2}(t-x)^2$ und $u(t) = \frac{1}{2\cdot 3}(t-x)^3$. Wir erhalten damit bereits

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(x_0) \\ &\quad + \frac{1}{2\cdot 3}\Big[(t-x)^3 f'''(t)\Big]_{x_0}^{x} - \frac{1}{2\cdot 3}\int_{x_0}^{x}(t-x)^3 f^{(4)}(t)\,dt \\ &= f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(x_0) - \frac{1}{2\cdot 3}(x_0-x)^3 f'''(x_0) \\ &\quad - \frac{1}{2\cdot 3}\int_{x_0}^{x}(t-x)^3 f^{(4)}(t)\,dt\,. \end{aligned}$$

Die nächste Runde wird uns das Gesetz verraten, nach dem die weiteren Summanden zu bilden sind. Wir wählen wieder $u'(t) = \frac{1}{3!}(t-x)^3$ und $u(t) = \frac{1}{4!}(t-x)^4$. Dabei benutzen wir die Schreibweise $3! = 2\cdot 3$, $4! = 2\cdot 3\cdot 4$, …, $n! = 2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n$ für die *Fakutlät* $n!$ einer natürlichen Zahl n. Wir vereinbaren $0! = 1$. $v(t)$ ist inzwischen die 4.te Ableitung $f^{(4)}(t)$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!}(x-x_0)^3 f'''(x_0) \\ &\quad - \frac{1}{4!}\Big[(t-x)^4 f^{(4)}(t)\Big]_{x_0}^{x} + \frac{1}{4!}\int_{x_0}^{x}(t-x)^4 f^{(5)}(t)\,dt \\ &= f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!}(x-x_0)^3 f'''(x_0) \\ &\quad + \frac{1}{4!}(x-x_0)^4 f^{(4)}(x_0) + \frac{1}{4!}\int_{x_0}^{x}(t-x)^4 f^{(5)}(t)\,dt\,. \end{aligned}$$

Der n-te Summand wird also durch $\frac{1}{n!}(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ gegeben sein und das letzte Integral durch

$$R_n(x_0, x) = \frac{(-1)^n}{n!}\int_{x_0}^{x}(t-x)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\,.$$

Dabei bewirkt $(-1)^n$ das abwechselnde Vorzeichen des Integrals. Für gerades n ergibt sich das $+$Zeichen und für ungerades n das $-$Zeichen. Das Ergebnis unserer Überlegungen besteht nun in der folgenden Formel:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \\ &\quad \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x_0, x)\,. \end{aligned} \tag{II.12}$$

Das ist die *Taylor-Entwicklung der Funktion* f *um den Punkt* x_0 *herum bis zur n-ten Ordnung*. Das Polynom

$$t_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{II.13}$$

ist das *Taylor-Polynom* n-ter Ordnung.
Der Ausdruck $R_n(x_0, x)$ wird *Restglied* der Entwicklung genannt. Für die uns interessierenden Funktionen hat es die Eigenschaft, beliebig klein zu werden, wenn wir n nur genügend groß machen. Daher erhält man bei großem n eine gute Näherung für den Funktionswert $f(x)$, wenn man das Restglied einfach wegläßt:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Die meisten Funktionen werden um die Stelle $x_0 = 0$ herum entwickelt. Dann lautet die Taylor-Formel etwas einfacher:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(0, x)\,, \qquad \text{(II.14)}$$

bzw.

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n . \qquad \text{(II.15)}$$

Wie wendet man diese Formel an? Für eine konkrete Funktion f verlangt sie von uns, daß wir die Ableitungen bis zu der Ordnung bestimmen, bis zu der wir die Funktion entwickeln wollen. Dann haben wir nur noch die Stelle x_0 in die Ableitungen einzusetzen. Wenn wir in der Lage sind, die allgemeine Form des n—ten Summanden zu bestimmen, dann können wir die Taylor-Entwicklung bequem auf jede Ordnung ausdehnen.

B

(1) $f(x) = e^x$. Wir wissen bereits: $f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$, so daß $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ gilt. Nun müssen wir nur noch in (II.15) einsetzen und erhalten:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n .$$

(2) $f(x) = \sin(x)$. Dann ist $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, $f'''(x) = -\cos(x)$ und $f^{(4)}(x) = \sin(x)$. Ab hier wiederholen sich die Ableitungen in genau derselben Reihenfolge, wie die ersten vier. Wir erhalten:
$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 1$, $f^{(6)}(0) = 0$, $f^{(7)}(0) = -1, \ldots$.
Versuchen wir das Bildungsgesetz aufzustellen: Offensichtlich verschwinden alle geraden Ableitungen an der Stelle 0. Die ungeraden Ableitungen sind abwechselnd 1 und -1. Zunächst benötigen wir eine Formel für die ungeraden Zahlen. Das ist einfach, denn die *geraden* Zahlen lassen sich leicht bestimmen: Sie müssen von der Form $n = 2k$ sein, weil sie durch 2 teilbar sein müssen. Da neben jeder geraden Zahl eine ungerade Zahl steht, muß diese von der Form $n = 2k - 1$ oder $n = 2k + 1$ sein (je nachdem, ob wir bei $k = 1$ oder $k = 0$ zu zählen anfangen). Nun müssen wir den sog. *Vorzeichen-Flip* $(-1)^n$ richtig

justieren. Er kann nur von der Form $(-1)^k$ oder $(-1)^{k+1}$ sein (k ist die Variable, mit deren Hilfe wir die ungeraden Zahlen abzählen, $k = 0, 1, \ldots$). Es ist normalerweise ausreichend, wenn wir den Flip an *einem* Summanden der Entwicklung justieren. Für $n = 1$, also $k = 0$ ($1 = 2 \cdot 0 + 1$), haben wir das Vorzeichen $+1$, das von $(-1)^k$ für $k = 0$ ebenfalls geliefert wird. Für $k = 1$ erhalten wir $(-1)^1 = -1$. $k = 1$ entspricht $n = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. Das Vorzeichen von $f'''(0)$ ist tatsächlich -1. Also ist der Vorzeichen-Flip einfach $(-1)^k$, $k = 0, 1, \ldots$. Setzen wir in die Taylor-Formel ein, so erhalten wir

$$\sin(x) \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - + \ldots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

Die Approximation von sin durch die Taylor-Polynome t_n bis zur Ordnung $n = 21$ ist auf Seite 72 wiedergegeben.

(3) $f(x) = \cos(x)$. Dasselbe Verfahren ergibt hier

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - + \ldots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}.$$

(4) $f(x) = \ln(x+1)$. Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir:

$f'(x) = \frac{1}{x+1}$, $f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$, $f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{(x+1)^4}$, $f^{(5)}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(x+1)^5} = \frac{4!}{(x+1)^5}$.

Damit ist $f(0) = \ln(1) = 0$, $f'(0) = 1$, $\frac{f''(0)}{2!} = -\frac{1}{2}$, $\frac{f'''(0)}{3!} = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$, $\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -\frac{2 \cdot 3}{4!} = \frac{1}{4}$, $\frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$. Eingesetzt erhalten wir die Entwicklung bis zur 5. Ordnung

$$\ln(x+1) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + - \cdots.$$

Die Summanden 6. und 7. Ordnung werden wohl $-\frac{1}{6}x^6$ und $\frac{1}{7}x^7$ lauten. Daraus können wir den Summanden n-ter Ordnung leicht zu $(-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n$ bestimmen. Wir erhalten also für die Entwicklung des natürlichen Logarithmus:

$$\ln(x+1) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n.$$

An diesem Beispiel sehen wir auch, daß diese Entwicklung im Allgemeinen nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ sinnvoll ist. Offensichtlich ist $x = -1$ auf der linken Seite nicht erlaubt, denn 0 liegt nicht im Definitionsbereich von ln. Für diesen Wert kann also auch die rechte Seite keine Annäherung an den Funktionswert ergeben, da dieser ja gar nicht vorhanden ist. Tatsächlich ergibt die rechte Seite für $x = -1$ (bis auf ein gemeinsames Vorzeichen) eine berühmte Reihe,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots ,$$

die sog. *harmonische Reihe*, die gegen $+\infty$ divergiert, die sich also nicht zu einer endlichen Zahl zusammenzählen läßt. Haben wir einen x-Wert gefunden, für den sich die rechte Seite einer Entwicklung nicht mehr summieren läßt (wenn wir also versuchen, den Grenzwert für $n \to \infty$ durchzuführen), dann läßt sie sich auch für keine andere Zahl mehr summieren, deren Betrag größer ist. In unserem Beispiel heißt das, daß sich die rechte Seite für keine Zahl x mit $|x| > 1$ aufsummieren läßt. Für $x = 1$ dagegen konvergiert die Reihe noch, und zwar, wie unsere Entwicklung vermuten läßt, gegen $\ln(2)$:

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + - \cdots .$$

Allerdings konvergiert diese Reihe nur sehr langsam. Z.B. ist für $n = 26$ der genäherte Wert der Reihenentwicklung 0.674285961081290, gegenüber $\ln(2) = 0.693147180559945\ldots$.

(5) $f(x) = e^{-x^2}$. Die Taylor-Entwicklung für diese Funktion erhalten wir einfach dadurch, daß wir $-x^2$ statt x in die Taylor-Entwicklung von e^x einsetzen. Das ergibt:

$$e^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}x^{2n} .$$

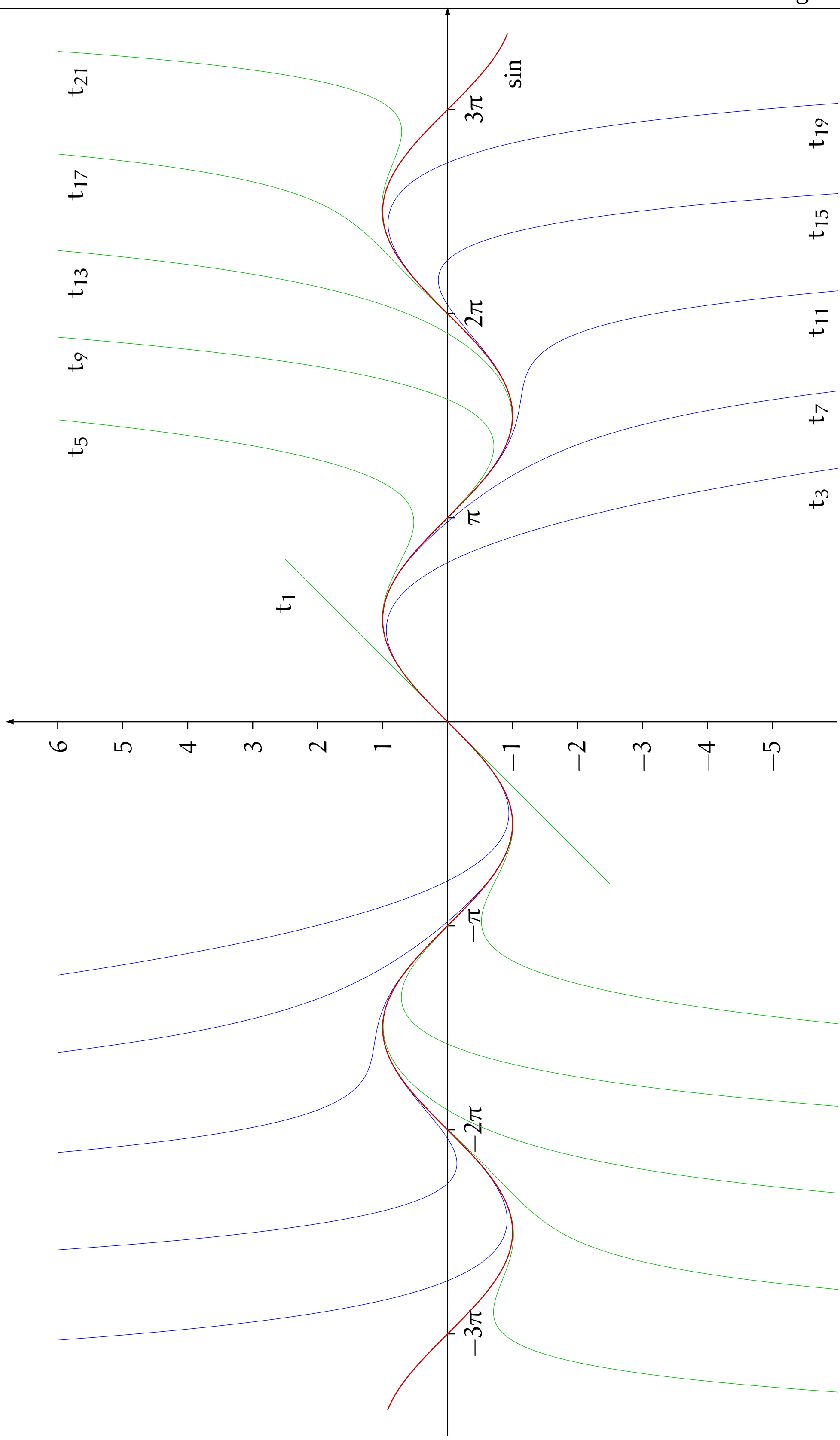


Abbildung II.3 *Approximation von* sin *durch Taylor-Polynome* $t_1, t_3, \ldots, t_{21}$

II.3.2 Das Volumen eines Rotationskörpers Bisher haben wir das Integral dazu benutzt, Flächeninhalte zu bestimmen. Tatsächlich hat es aber viel weiterreichende Anwendungsmöglichkeiten. Um für eine gegebenes Problem den richtigen Integralausdruck zu finden, gehen wir den Weg über die Riemann-Summen. Wir führen das hier am Beispiel des Volumens eines Rotationskörpers vor. Dazu denken wir uns den Graphen einer Funktion f um die x-Achse rotierend. Dabei beschreibt er die Oberfläche eines Rotationskörpers (siehe nebenstehende Skizze). Das Volumen bestimmen wir näherungsweise, indem wir den Körper in Scheiben mit der Breite Δx_i und dem Radius $f(x_i)$ zerlegen. Dabei ist $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ des Basisintervalls $[a, b]$ mit der Feinheit $|\mathcal{Z}|$ (vergl. Seite 52). Das Volumen einer solchen Scheibe ist dann also $\pi f(x_i)^2 \Delta x_i$, nämlich Grundfläche $\pi f(x_i)^2 \cdot$ Höhe Δx_i. Zählen wir die Volumina aller dieser Scheibchen zusammen, so erhalten wir den Näherungswert

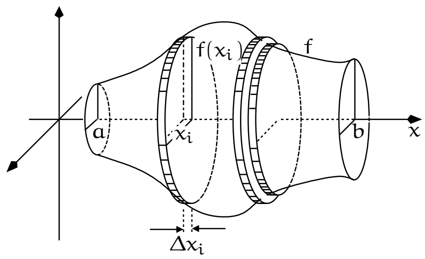


Abbildung II.4
Zum Volumen eines Rotationskörpers

$$V \approx \pi\Big(f(x_0)^2\Delta x_0 + f(x_1)^2\Delta x_1 + f(x_2)^2\Delta x_2 + \cdots + f(x_n)^2\Delta x_n\Big) = \pi \sum_{i=0}^{n} f^2(x_i)\Delta x_i\,.$$

Um den genauen Wert des Volumens zu erhalten, führen wir den Grenzwert $|\mathcal{Z}| \to 0$ beliebig feiner Zerlegungen durch:

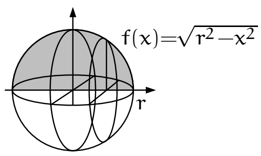
$$V = \lim_{|\mathcal{Z}|\to 0} \pi \sum_{i=0}^{n} f^2(x_i)\Delta x_i\,.$$

Wenn wir das mit (II.1) vergleichen, so sehen wir, daß das Volumen V der Grenzwert von Riemann-Summen ist, allerdings nicht für die Funktion f, sondern für πf^2. Also ist das Volumen des Rotationskörpers durch das Integral

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx \tag{II.16}$$

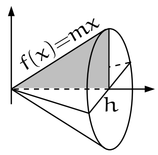
gegeben. Zur Berechnung können wir daher wieder auf unsere Integrationstechniken zurückgreifen, nun eben auf f^2 angewandt.

$\boxed{\text{B}}$ Wir berechnen das Volumen einer Kugel. Dafür lassen wir einen Halbkreis um die x-Achse rotieren. Seine Gleichung ist $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Damit ergibt sich für das Kugelvolumen:



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^{r} f^2(x)\,dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx \\ &= \pi \Big[r^2 x - \frac{1}{3}x^3 \Big]_{-r}^{r} = \pi\Big(r^3 - \frac{1}{3}r^3\Big) - \pi\Big(-r^3 + \frac{1}{3}r^3\Big) = \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 . \end{aligned}$$

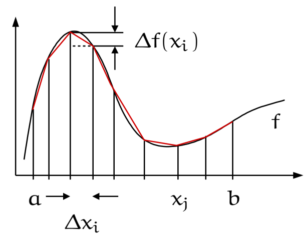
Das Volumen eines Kegels erhalten wir, indem wir eine Ursprungsgerade $f(x) = mx$ um die x-Achse rotieren lassen.

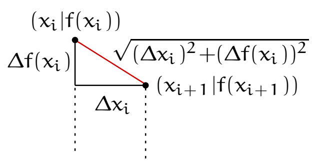


$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{0}^{h} f^2(x)\,dx = \pi \int_{0}^{h} m^2x^2\,dx \\ &= \pi \Big[\frac{1}{3} m^2 x^3 \Big]_{0}^{h} = \frac{1}{3}\pi m^2 h^3 = \frac{1}{3}\pi (mh)^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 h , \end{aligned}$$

denn der Radius r des Grundkreises ist $r = mh$.

II.3.3 Die Länge einer Kurve Die Länge des Bogens eines Funktionsgraphen bestimmen wir zunächst näherungsweise, indem wir ihn durch aneinanderstoßende Geradenstücke, einen sog. *Polygonzug*, ersetzen. Dazu führen wir wieder die Zerlegung $\mathcal{Z}$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$, des Basisintervalls $[a, b]$ mit der Feinheit $|\mathcal{Z}|$ ein. Dann ersetzen wir den tatsächlichen Kurvenverlauf auf jedem der kleinen Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ durch ein Geradenstück, das die Randpunkte $(x_i|f(x_i))$ und $(x_{i+1}|f(x_{i+1}))$ des Kurvenbogens über $[x_i, x_{i+1}]$ miteinander verbindet. Die Länge eines solchen Geradenstücks ist nach dem Satz von Pythagoras:





$$\ell_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta f(x_i))^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i .$$

Die Länge L des Kurvenbogens zwischen a und b erhalten wir dann ungefähr, wenn wir die Längen ℓ_i aufsummieren:

$$L \approx \ell_0 + \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_i + \cdots + \ell_n = \sum_{i=0}^{n} \ell_i = \sum_{i=0}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i .$$

Den genauen Wert für L hoffen wir wieder durch den Grenzwert $|\mathcal{Z}| \to 0$ verschwindender Feinheit der Zerlegung $\mathcal{Z}$ zu gewinnen. Dafür müssen wir die richtige Riemann-Summe finden, die uns verrät, welches Integral wir zur Berechnung von L benutzen können. In obiger Summe steht unter der Wurzel der Differenzenquotient $\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}$, der für $|\mathcal{Z}| \to 0$, also für kleines Δx_i, durch die Ableitung $f'(x_i)$ ersetzt werden kann. Dadurch erhalten wir nun tatsächlich eine Riemann-Summe für die Approximation von L :

$$L \approx \sum_{i=0}^{n} \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} \cdot \Delta x_i \,.$$

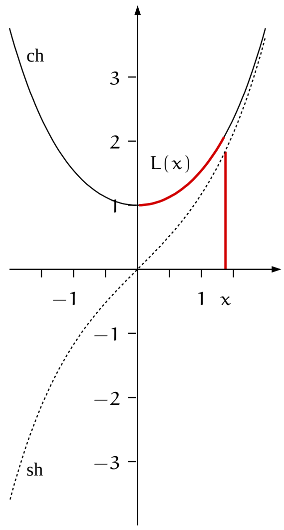
Wir vergleichen das wieder mit (II.1) und sehen, daß die Länge L durch das Integral

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \tag{II.17}$$

gegeben sein muß.

$\boxed{\text{B}}$ Als Anwendung bestimmen wir die Länge der sog. *Kettenlinie*, die durch die Funktion ch gegeben ist (vergl. (I.33)):

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\,.$$



Sie besitzt die Ableitung und die Stammfunktion $\mathrm{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Der Name *Kettenlinie* für ch stammt daher, daß diese Funktion den Verlauf einer Kette beschreibt, die zwischen zwei Punkten lose aufgehängt ist.

Jetzt können wir die Länge $L(x)$ der Kettenlinie im Bereich von 0 bis x berechnen (dabei verwenden wir $1 + \mathrm{sh}^2 = \mathrm{ch}^2$, vergl. (I.35)):

$$\begin{aligned} L(x) &= \int_0^x \sqrt{1 + (\mathrm{ch}'(t))^2}\, dt = \int_0^x \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(t)}\, dt \\ &= \int_0^x \sqrt{\mathrm{ch}^2(t)}\, dt = \int_0^t \mathrm{ch}(t)\, dt = \Big[\mathrm{sh}(t)\Big]_0^x = \mathrm{sh}(x)\,. \end{aligned}$$

Die Funktion $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ gibt also nicht nur die Ableitung und die Stammfunktion von ch wieder, sondern auch die Länge des Kurvenbogens dieser Funktion über dem Intervall $[0, x]$.

Index