

Experimentalphysik I

Diplomstudium Chemie
(Universität Stuttgart)

Verfasser: Oliver Martin
Dozent: Dr. Wolf Wölfel
(im WS 2005/06)

1. Auflage 2006

Impressum:

© 1. Auflage, Dezember 2006

Alle Rechte auf das vorliegende Werk inklusive aller graphischen Abbildungen sind dem Verfasser vorbehalten.

Oliver Martin
Böblinger Straße 224
70199 Stuttgart

Tel.: 0711 / 23 72 434

E-Mail: mail@olivermartin.org

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

1. Inhaltsverzeichnis

1

Experimental- physik I

I. Mechanik

1. Kinematik

- Ort: Abstand zweier Orte
- Zeit
- Verknüpfung beider: $s = s(t)$ (eine Funktion des Weges von der Zeit)

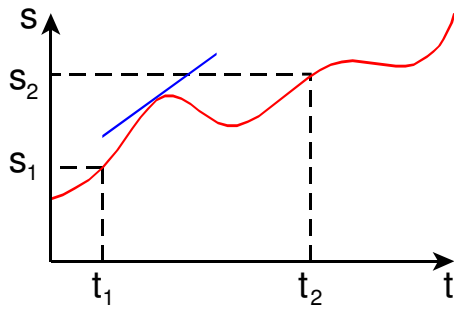
1.1 Die Zeit

- Einheit: Sekunde [t] = s
- Definitionen:
 - astronomische Zeit: 365,25 Sonnentage oder 366,25 Sternentage hat das Jahr
 - $1 \text{ s} = 1/864.000$ Sonnentage
 - veraltete Definition
 - mikroskopische Definition aufgrund der Ungenauigkeit der vorhergehenden Definitionen und der Schwankungen
 - keine äußeren Einflüsse bei Energieübergängen in Atomen (festgelegte Energieportionen)
 - Standard (Zeitnominal): ^{133}Cs -Atomuhr
 - $\nu = \text{Zahl der Perioden}/\text{Zeitintervall} = n/\Delta t = 1/T$
 - Einheit: $1 \text{ Hz} = 1 / \text{s}$
 - damit ergibt sich für die Sekunde: $1 \text{ s} = 9.192.631.770 \text{ T}$
 - $\nu = 9,192631770 \text{ GHz}$

1.2 Die Länge

- Einheit: [l] = 1 m
- Definitionen:
 - 10^{-7} -Teil des Erdquadranten (1/4 des Äquators)
 - Urmeter in Paris (rel. Unsicherheit 10^{-6})
 - alte Definition
 - $1 \text{ m} = 1.650.763,73 \cdot \lambda(^{86}\text{Kr})$
- Lichtgeschwindigkeit: $c = 299.792.458 \text{ m/s}$
- Winkel:
 - Grad: $360^\circ \rightarrow$ Vollkreis
 - Radiant: $2 \cdot \pi \text{ rad} \rightarrow$ Vollkreis
 - $1 \text{ rad} = 57,3^\circ$

1.3 Bewegung



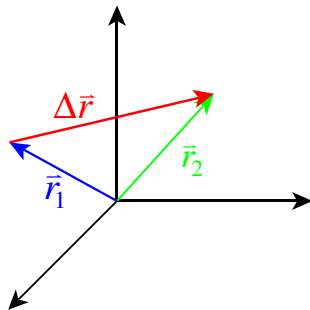
1.3.1 Mittlere Geschwindigkeit

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

1.3.2 Momentangeschwindigkeit

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

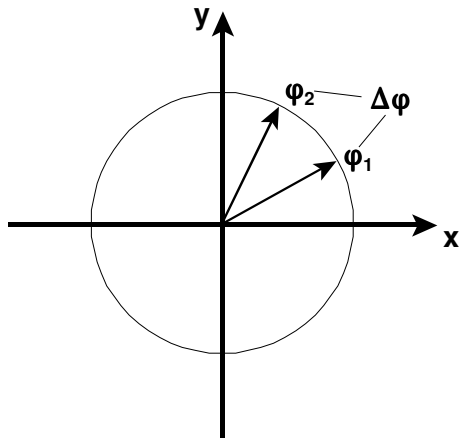
1.3.3 Fortbewegung im dreidimensionalen Raum



Mittlere Geschwindigkeit: $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

Momentangeschwindigkeit: $\vec{v} = \frac{d\Delta \vec{r}}{d\Delta t} = \dot{\vec{r}}$

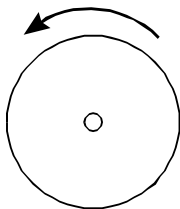
1.4 Drehbewegungen



Mittlere Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

Momentane Winkelgeschwindigkeit: $\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \dot{\varphi}$

ω als Vektor: $\vec{\omega}$



Richtung des Vektors steht senkrecht zur Ebene ("Rechte-Hand-Regel").

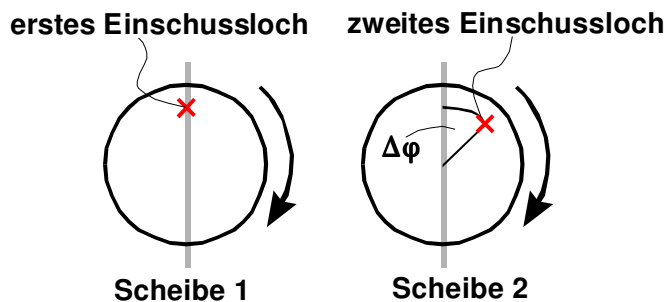
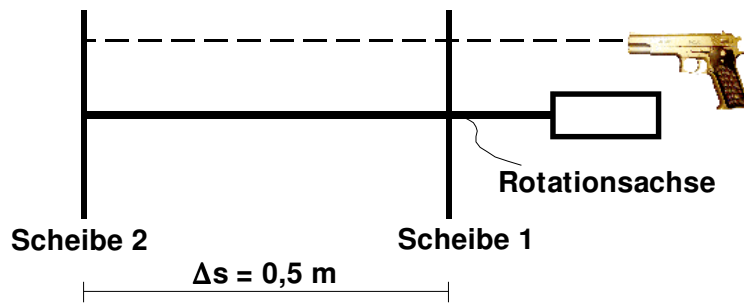
1.4.1 "Umrechnung" auf Linearbewegung

$$v = \omega \cdot r \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

1.4.2 Umrechnung auf Drehzahl

$$\omega = 2\pi n \quad [n] = \text{Umdrehung/s}$$

1.4.3 Experiment: Geschwindigkeit der Kugel zwischen zwei Platten



$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

→ Delta s gegeben: 0,5 m

→ benötigt Delta t: $\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$

→ benötigt ω : $\omega = 2\pi n$

→ n gegeben: $n = 60 \frac{1}{s}$

→ $\omega = 2\pi 60 s^{-1} = 377 s^{-1}$

Umrechnung rad und °: $\varphi[rad] = \frac{\varphi[^\circ]}{2\pi}$

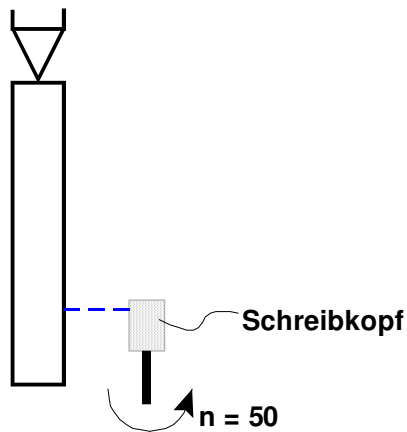
→ $\Delta \varphi$ gegeben: 38 °

$\Delta \varphi = 38^\circ = 0,66 \text{ rad}$

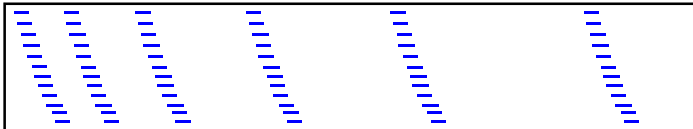
$\Delta t = \frac{0,66}{377 s^{-1}} = 1,75 \text{ ms}$

$v = \frac{0,5 \text{ m}}{1,75 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 285,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

1.4.4 Experiment "Falllatte"



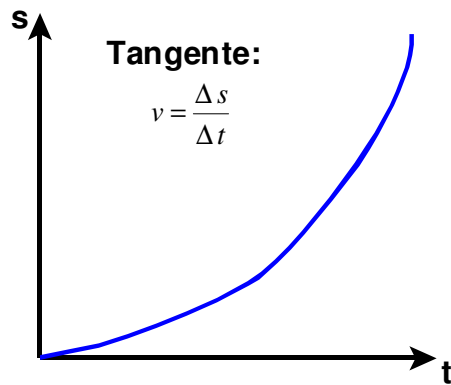
Schreibkopf spritzt in definierten Zeitabständen Tinte heraus. Die Falllatte bewegt sich derweil. Folgendes Ergebnis lässt sich auf der Falllatte erkennen:



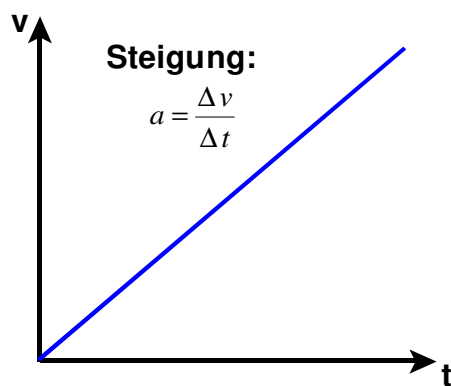
Messtabelle:

t [s]	s [cm]	Δs [cm]	$\Delta(\Delta s)$ [cm]
0	0	2,4	0,2
0,02	2,4	2,6	0,4
0,04	5,0	3,0	0,3
0,06	8,0	3,3	0,4
0,08	11,3	3,7	0,5
0,10	15,0	4,2	0,3
0,12	19,2	4,5	0,5
0,14	23,7	5,0	0,2
0,16	28,7	5,2	0,6
0,18	33,9	5,8	
0,20	39,7		

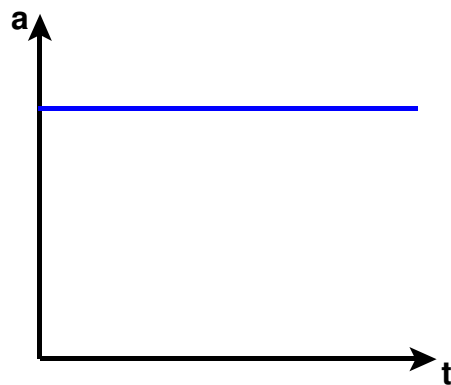
Graphische Darstellung:
s-t-Diagramm:



v-t-Diagramm:



a-t-Diagramm:



1.5 Beschleunigung

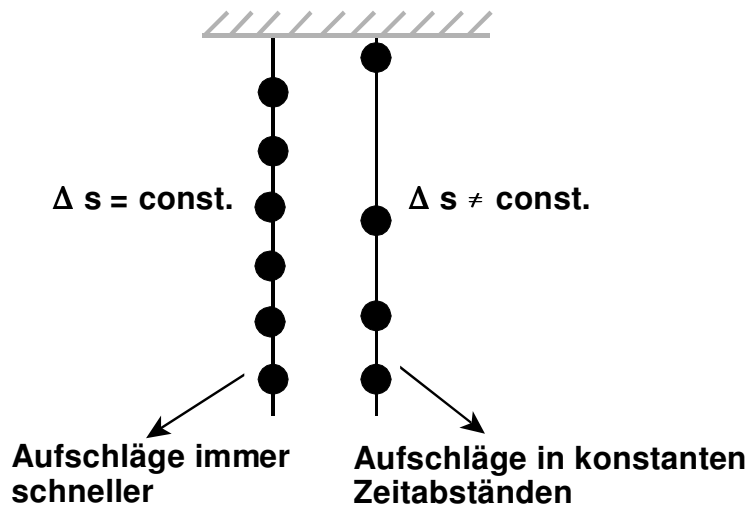
- zeitliche Änderung der Geschwindigkeit

- mittlere Beschleunigung: $\bar{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

- Momentanbeschleunigung: $\bar{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt} \dot{s} = \ddot{s}$

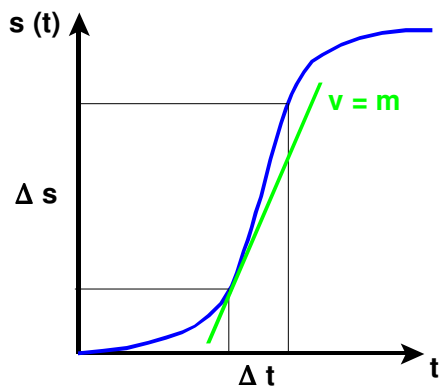
- Winkelbeschleunigung: $\alpha = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \dot{\bar{\omega}} = \ddot{\varphi}$

1.5.1 Experiment zum Nachweis der Fallbeschleunigung



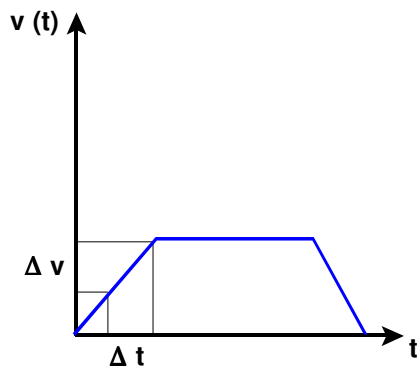
1.6 Zusammenfassung

1.6.1 s-t-Diagramm



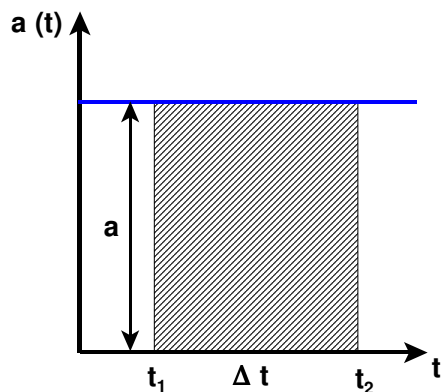
Zeitliche Änderung von $s \rightarrow$ Geschwindigkeit: erste Ableitung des Weges nach der Zeit

1.6.2 v-t-Diagramm



Zeitliche Änderung von $v \rightarrow$ Beschleunigung: zweite Ableitung des Weges nach der Zeit

1.z.3. a-t-Diagramm



$$\frac{dv}{dt} = a(t) \Leftrightarrow dv = a(t) \cdot dt$$

Die Fläche im a-t-Diagramm durch Zeitintervalle eingeschlossen ergibt die Geschwindigkeit.

Funktionsgeometrische Herleitung:

$$(I) \Delta v = a \cdot \Delta t$$

Infinitesimale Herleitung:

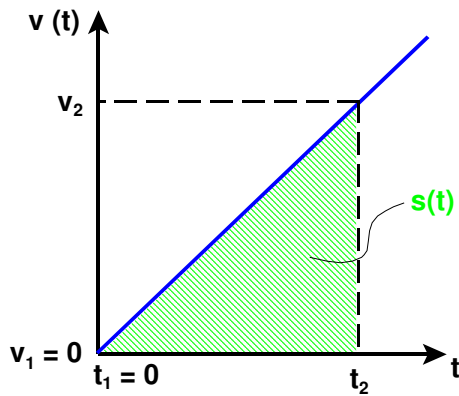
$$(II) \int_{v_1}^{v_2} dv = v_0 + \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$$

$$v_2 - v_1 = v_0 \cdot a(t) \cdot (t_2 - t_1)$$

\rightarrow Äquivalenz zu (I)!!

Ist $v_1 = 0 \wedge v_0 = 0 \wedge a(t) = a \wedge t_1 = 0 \wedge t_2 = t$ gilt:

$$\rightarrow a = v \cdot t$$



Die Fläche im v-t-Diagramm durch Zeitintervalle eingeschlossen ergibt den Weg.

Funktionsgeometrische Herleitung:

$$\frac{ds}{dt} = v(t) \Leftrightarrow ds = v(t) \cdot dt$$

Infinitesimale Herleitung:

$$\int t = \frac{1}{2} v_2 t_2$$

$$\int_{s_1}^{s_2} ds = s_0 + \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

$$v(t) = v_0 + at$$

$$s_2 - s_1 = s_0 + \int_{t_1}^{t_2} (v_0 + at) dt = s_0 + \int_{t_1}^{t_2} v_0 dt + \int_{t_1}^{t_2} (at) dt$$

$$\Delta s = s_0 + v_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1)^2$$

Wenn $s_0 = 0 \wedge v_0 = 0 \wedge t_1 = 0 \wedge s_1 = 0 \wedge s = s(t)$, dann:

$$\rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2$$

Beispiel: Falllatte $\rightarrow \ddot{s} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

1.6.4 Erkenntnisse

- 1.) Bei konstanter Beschleunigung nimmt v proportional mit der Zeit zu.
- 2.) Bei $a = \text{const.}$ nimmt der Weg quadratisch mit der Zeit zu.

1.6.5 Experiment

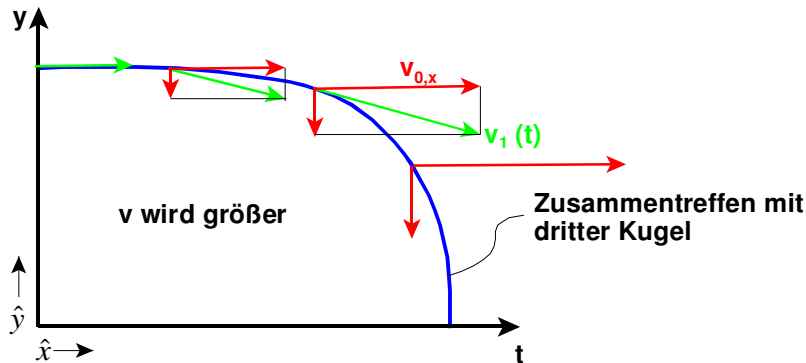
Auf 3 Kugeln wirkt "gleichzeitig" die Erdbeschleunigung aus unterschiedlichen Anfangsparametern.

Kugel 1: Freier, senkrechter Fall

Kugel 2: Anfangsgeschwindigkeit $v_0 > 0$ mit Richtung waagrecht zum Boden

Kugel 3: Zunächst freier, senkrechter Fall, dann Beeinflussung durch Zusammentreffen mit der zweiten Kugel → Impuls von zweiter Kugel, wobei diese wiederum fast senkrecht weiter zum Boden fällt.

Diagramm von zweiter Kugel:



Richtungsvektoren: $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

$$\vec{s}(t) = x(t) \cdot \hat{x} + y(t) \cdot \hat{y} + z(t) \cdot \hat{z} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

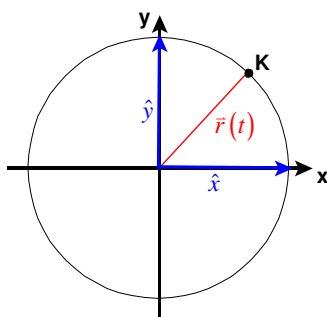
$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \\ -g \cdot t \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot t \\ -\frac{1}{2}g \cdot t^2 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = v_0 \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{x(t)}{v_0}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow y(t) = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2} x^2 = -C \cdot x^2$$

C...Konstante

1.7 Mathematische Beschreibung der Drehbewegung



$$\vec{r}(t) = \hat{x} \cdot r_0 \cdot \cos \varphi + \hat{y} \cdot r_0 \cdot \sin \varphi$$

mit \hat{x}, \hat{y} : Einheitsvektor (Einheit 1); r_0 : Betrag des Ortsvektors; $\vec{r}(t)$: Ortsvektor

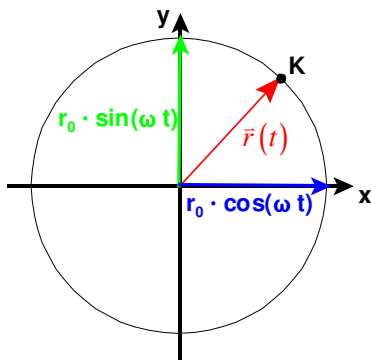
1.7.1 Bei gleichförmiger Bewegung

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varphi}{t} \Leftrightarrow \varphi = \omega \cdot t$$

$$\vec{r}(t) = r_0 \cdot (\hat{x} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t)) = r_0 \cdot \hat{r}(t)$$

Betrag *Richtung* *Betrag* *Einheitsvektor*

→ Der Einheitsvektor ist zeitabhängig:



1.7.2 Geschwindigkeit durch Ableiten

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{d}{dt} (r_0 \cdot \hat{r}(t)) = r_0 \cdot \frac{d}{dt} \hat{r}(t) = r_0 \cdot \frac{d}{dt} (\hat{x} \cdot \cos(\omega t) + \hat{y} \cdot \sin(\omega t))$$

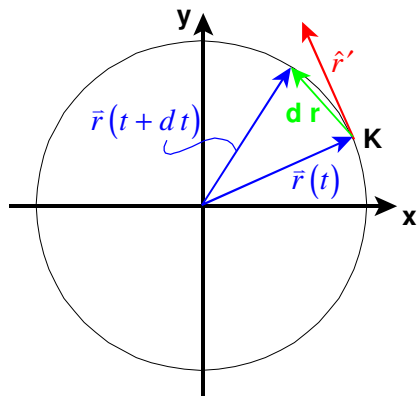
$$\omega = \text{const.}$$

$$\vec{v}(t) = \omega_0 \cdot r_0 \cdot (-\hat{x} \cdot \sin(\omega t) + \hat{y} \cdot \cos(\omega t))$$

Betrag *Richtung von v*

$$\vec{v}(t) = \omega_0 \cdot r_0 \cdot \hat{r}'$$

Einheitsvektor \hat{r}' gibt die Richtung von v an und steht senkrecht zu r .



$$\vec{v}(t) = \omega \cdot \vec{r}'$$

Fazit: Zeitliche Ableitung des Ortsvektors ergibt Bahngeschwindigkeit. Da gleichförmige Bewegung: $\omega = const.$ \wedge $|\vec{v}| = const.$

→ Die Richtung ändert sich aber zeitlich! Es muss also eine Beschleunigung vorliegen: Die Zentripetalbeschleunigung.

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \omega^2 \cdot r_0 \cdot (-\hat{x} \cdot \cos(\omega t) - \hat{y} \cdot \sin(\omega t))$$

Betrag *Richtung*

$$\vec{a}(t) = \omega^2 \cdot (r_0 \cdot \hat{r}'') = -\omega^2 \cdot \vec{r}$$

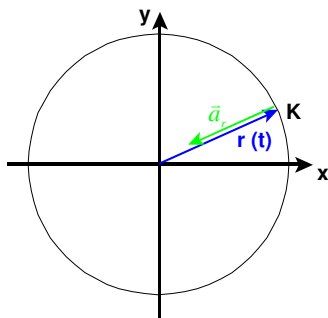
mit \hat{r}'' : Einheitsvektor in Richtung der Beschleunigung.

Fazit: Bei gleichförmiger Bewegung ist $\vec{a}(t)$ stets zum Kreismittelpunkt gerichtet.

→ Zentripetalbeschleunigung: \vec{a}_r

$$a_r = \omega^2 \cdot r = \omega \cdot (\omega \cdot r) = \omega \cdot v$$

$$\vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

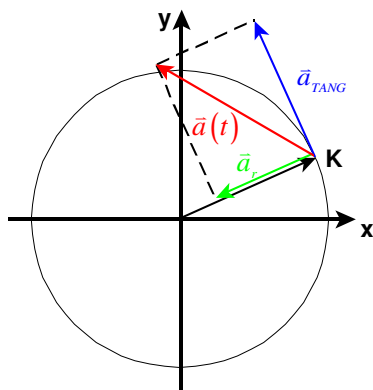


Beschleunigung bei ungleichförmiger Bewegung:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_{TANG} + \vec{a}_r$$

im Allgemeinen:

$a(t)$ ist nicht parallel zu $\vec{v}(t)$



Die Beschleunigung ist dabei stets zum Kreisinnern gerichtet.

2. Dynamik: Grundgesetze der klassischen Mechanik

2.1 Konzepte der klassischen Mechanik

Körper besteht aus Materie: - Masse (m) } Dichte (ρ)
- Volumen (V) } $\rho = \frac{m}{V}$ $[\rho] = 1 \frac{kg}{m^3}$
→ Idealisierung: Massepunkt

Einwirkung auf Körper: Kraft (F) mit $[F] = 1N = 1 \frac{kg \cdot m}{s^2}$

2.2 Newton'sche Axiome

Gelten nur im Inertialsystem: Dreidimensionales Koordinatensystem, welches sich mit konstanter Geschwindigkeit innerhalb des Universums bewegt.

2.2.1 Erstes Newton'sches Axiom: Trägheitsgesetz

Jeder Körper versucht im Zustand seiner Bewegung zu verharren, sofern die Summe aller Kräfte gleich 0 ist.

$$\sum_{i=1}^n F_i = \vec{F}_a = 0 \Rightarrow \vec{v} = const.$$

2.2.2 Zweites Newton'sches Axiom: Aktionsgesetz

Ist die Summe aller auf den Körper einwirkenden Kräfte ungleich 0, so wirkt eine resultierende Kraft auf den Körper, welche dessen Bewegungszustand ändert.

$$\vec{F}_a = \frac{d}{dt} m \cdot \vec{v} \quad \text{Impuls } \vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

speziell: $m = const. \Rightarrow \vec{F}_a = m \cdot \vec{a}$ (dynamisches Grundgesetz)

2.2.3 Drittes Newton'sches Axiom: Wechselwirkungsgesetz

Es gibt keine isolierte Kraft. Zu jeder Kraft gibt es eine gleich große, entgegengesetzte Gegenkraft, da sich der Körper aufgrund seiner Trägheit der Bewegungszustandsänderung widersetzt.

2.3 Masse

- skalare Größe
- $[m] = 1 \text{ kg}$

Eigenschaft:

- träge Masse: Widerstand, den der Körper der Bewegungsänderung (Beschleunigung) aufgrund seiner Trägheit entgegensetzt
- schwere Masse: Massenanziehung (z.B. Gravitation)

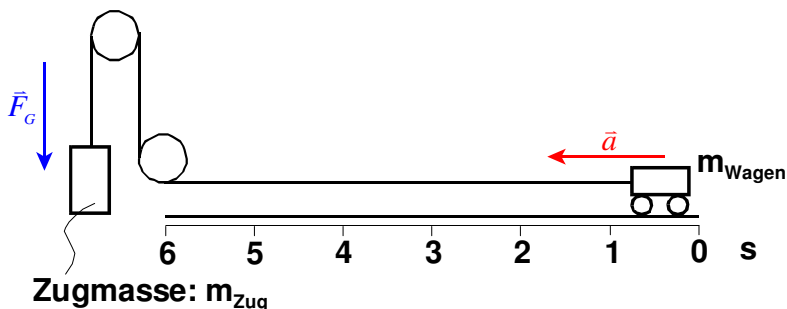
träge Masse \equiv schwere Masse

2.4 Kraft

- vektorielle Größe

$$\vec{F} \quad [\vec{F}] = 1N = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

2.4.1 Experiment zum zweiten Newton'schen Axiom



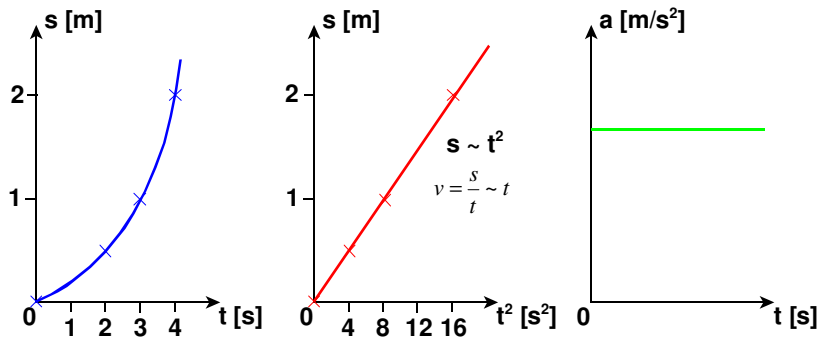
Untersuchung: $F \sim m \cdot a$?

Zeitmessung an den Fixpunkten.

$$m_{\text{ges}} = m_{\text{Wagen}} + m_{\text{Zug}}$$

Messwerttabelle:

s [m]	m _{Wagen} [g]	m _{Zug} [g]	m _{ges} [g]	t [s]	t ² [s ²]	a [m/s ²]
0,5	2478	150	5610	2,03	4,12	0,24
1,0	+ 2532	150	5610	2,84	8,07	0,25
2,0	+ 450	150	5610	4,04	16,23	0,25



Variation der Massen:

Messwerttabelle:

s [m]	m _{Wagen} [g]	m _{Zug} [g]	m _{ges} [g]	t [s]	t ² [s ²]	a [m/s ²]
1,0	2478	150	2805	2,04	4,16	0,48
	+ 27					
	+ 150					
1,0	2478	300	2805	1,43	2,04	0,98
	+ 27					
1,0	2478	300	5610	2,00	4,00	0,50
	+ 2532					
	+ 300					

$$F \sim m \cdot a$$

$$1.) a \sim \frac{F}{m} = \frac{F}{m_{ges}} = \frac{m_{Zug} \cdot g}{m_{ges}}$$

$$2.) a \sim \frac{2 \cdot F}{m_{ges}}$$

$$3.) a \sim \frac{2 \cdot F}{2 \cdot m_{ges}}$$

$$\Rightarrow g = \frac{m_{ges}}{m_{Zug}} \cdot a$$

$$\text{wenn } m_{Wagen} = 0 \Rightarrow m_{ges} = m_{Zug} \Rightarrow g = a$$

2.4.2 Gravitationskraft

$$F_G = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

mit γ : Gravitationskonstante

Speziell auf der Erdoberfläche gilt:

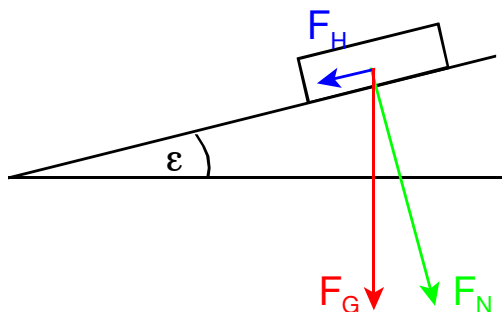
$$F_G = \gamma \cdot \underbrace{\frac{m_{\text{Erde}}}{r_{\text{Erde}}^2}}_g \cdot m$$

mit $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Vektoriell:

$$\vec{F}_G = \vec{g} \cdot m$$

2.4.3 Hangabtriebskraft



$$F_H = m \cdot g \cdot \sin \varepsilon$$

mit F_H : Hangabtriebskraft

$$F_N = m \cdot g \cdot \cos \varepsilon$$

mit F_N : Normalkraft

2.4.4 Reibungskraft

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

mit μ : Reibungskoeffizient

$$1 > \mu_H > \mu_{\text{Gl}} > \mu_R > 0$$

mit μ_H : Haftreibungskoeffizient; μ_{Gl} : Gleitreibungskoeffizient; μ_R : Rollreibungskoeffizient

Eine Reibungskraft ist stets entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung gerichtet.

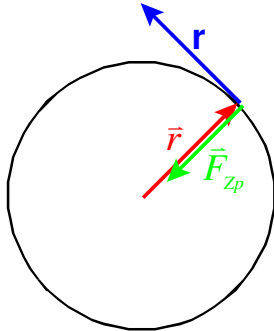
Beispiel

	μ_H	μ_{Gl}	μ_R
Gummi-Asphalt:	0,9	0,85	0,025
Stahl-Eis:	0,03	0,015	

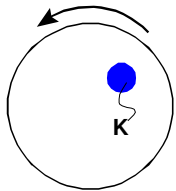
2.4.5 Zentripetalkraft

$$\vec{F}_{Zp} = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r} = -m \cdot \frac{v^2}{\vec{r}} = \vec{F}_{Zp} = -m \cdot \vec{a}_r$$

$$v = \omega \cdot r \text{ (Tangentialgeschwindigkeit)}$$



2.4.6 Experiment: Drehscheibe



Wann beginnt der Körper zu rutschen?

$$F_{HR} \geq F_{Zp} \Rightarrow \text{Körper bewegt sich nicht relativ zur Scheibe}$$

$$\vec{F}_{Zp} = -\vec{F}_{Zf}$$

$$\mu \cdot F_G = -m \cdot \omega^2 \cdot r = \mu \cdot m \cdot g_n$$

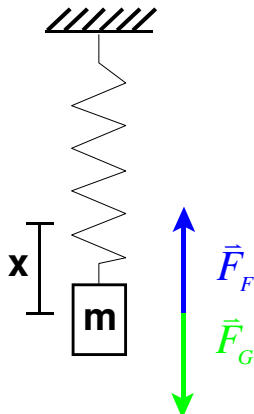
$$\rightarrow \omega^2 \cdot r = -\mu \cdot g_n$$

2.4.7 Federkraft

- elastische Kraft (Hook'sches Gesetz)

$$\vec{F}_F = -D \cdot \vec{x}$$

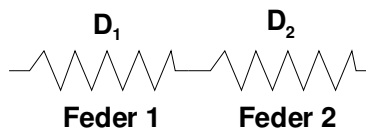
mit D: Federkonstante; x: Auslenkung



\vec{F}_F gleich groß wie \vec{F}_G in Ruhe.

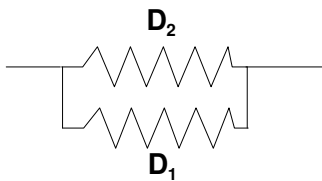
Kopplung von Federn:

- Serienkopplung:



$$D_{\text{ges}}: \frac{1}{D_{\text{ges}}} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}$$

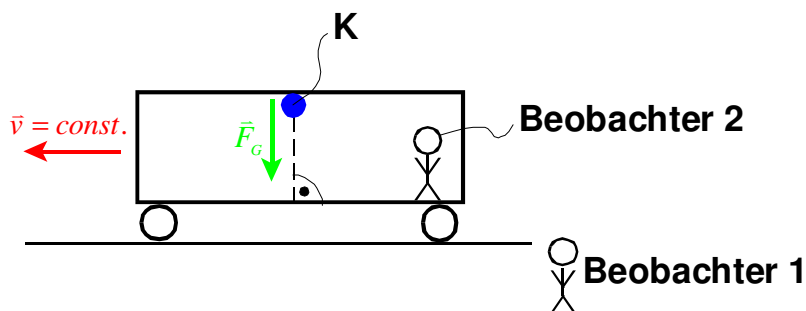
- Parallelkopplung:



$$D_{\text{ges}}: D_{\text{ges}} = D_1 + D_2$$

2.4.8 Trägheitskraft

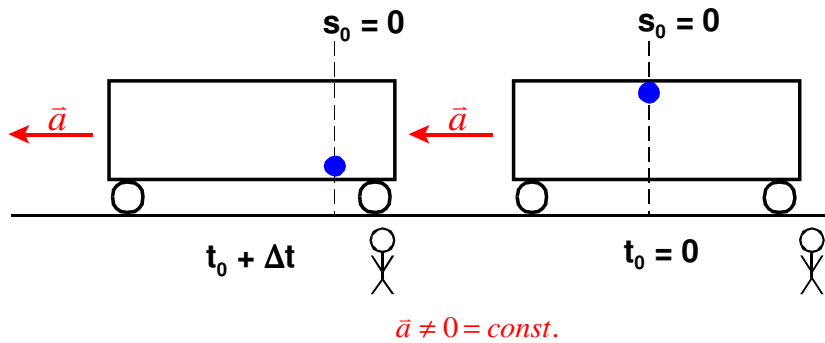
- d'Alembert'sches Prinzip
- Scheinkraft, d.h. tritt nur in beschleunigten Bezugssystemen auf
- Beispiel:



(fallengelassener Gegenstand)

→ Beobachter 1 und 2 sehen den Körper senkrecht fallend

beschleunigtes System:

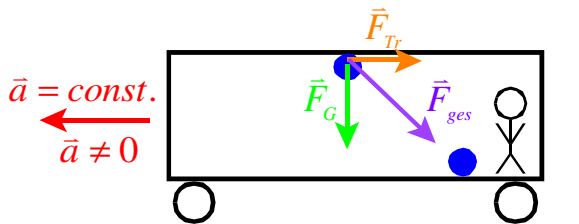


→ Beobachter 1: Körper fällt senkrecht, aber kommt um den Wegbetrag verschoben auf dem Boden des Fahrzeugs an, um den der Wagen bereits in der Zeit des Falles gefahren ist

→ Beobachter 2: Körper fällt schräg runter.

Summe aus Gewichtskraft und Trägheitskraft ergibt die Gesamtkraft, die den Körper schräg runter fallen lässt.

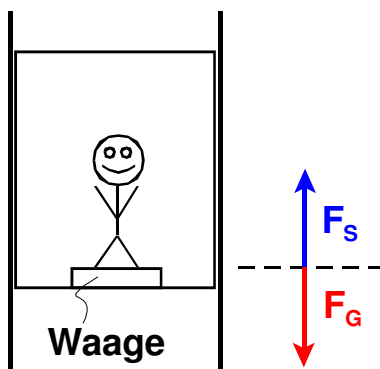
$$F_{Tr} = -m \cdot a$$



Beispiel: Aufzug

Beim Anfahren nach oben, geht man in die Knie und man wird scheinbar schwerer auf der Waage. Beim Anfahren nach unten hebt man scheinbar ein wenig ab und man wird scheinbar ein wenig leichter.

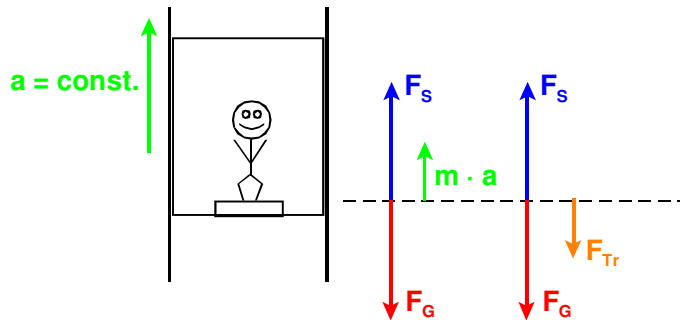
$a = 0$:



F_S : Seilkraft

$$F_G = m \cdot g = 76 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 750 \text{ N}$$

Aufzug fährt an nach oben:

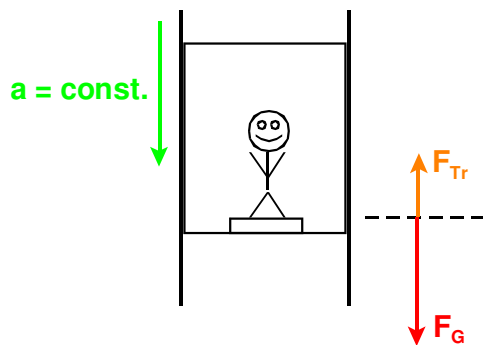


In Kabine:

$$\sum F = 0$$

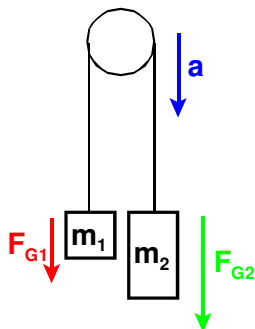
$$F_{ges} = F_G + F_{Tr} = F_s + F_G + F_{Tr} = 0$$

Aufzug fährt an nach unten:



$$F_{ges} = F_G - F_{Tr}$$

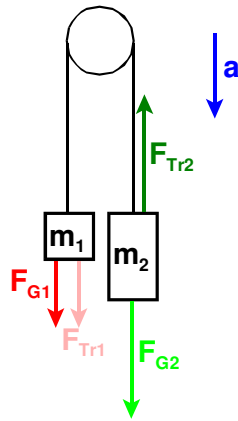
Experiment: Umlenkrolle



Von außen betrachtet:

$$F_{ges} = F_{G2} - F_{G1} = m \cdot a$$

Beobachter innerhalb des Systems:
Summe der Kräfte des Systems ist 0!

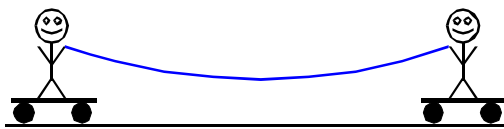


$$\begin{aligned} \sum F &= F_{G1} + F_{G2} + F_{Tr1} + F_{Tr2} = 0 \\ -F_{G1} + F_{G2} - F_{Tr1} - F_{Tr2} &= 0 \\ -(m_1 - m_2) \cdot g_n - (m_1 + m_2) \cdot a &= 0 \\ (m_1 + m_2) \cdot a &= -(m_1 - m_2) \cdot g_n \\ a &= \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} \cdot g_n \end{aligned}$$

Für die Trägheit des Systems sind alle Massen des Systems verantwortlich!

2.4.9 Experiment: Drittes Newton'sches Axiom

actio = reactio bzw. $\vec{F} = -\vec{F}'$
 → keine isolierte Kraft möglich!
 → z.B.: $F_{Tr} = -F_G$
 $m \cdot a = -m \cdot g_n$



Dimitri	Michael	Nils
90 kg	80 kg	80 kg

$$\begin{aligned} F_1 &= -F_2 \\ m_1 \cdot a_1 &= m_2 \cdot a_2 \\ s &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Leftrightarrow a = \frac{2s}{t^2} \\ m_1 &= \frac{2s_2^2}{t^2} = \frac{s_2}{s_1} \\ m_2 &= \frac{2s_1^2}{t^2} \end{aligned}$$

Egal, wer zieht oder wie die Massen sind. Die Kräfte ($m \cdot a$) bleiben im System überall gleich verteilt! Das bedeutet: Ist die Masse auf beiden Wagen unterschiedlich, beschleunigt der Wagen mit der schwereren Gesamtmasse langsamer als der Wagen mit der leichteren Gesamtmasse.

2.5 Impuls

2.5.1 Definition

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$$[\vec{p}] = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Kraft ändert Impuls

$$\rightarrow \text{Impuls: } \vec{F}_a = \frac{d}{dt} \cdot \vec{p} = \dot{\vec{p}}$$

mit \vec{F}_a : äußere Kraft

$$\vec{F}_a = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot (m \cdot v) = \dot{\vec{p}}$$

Greift eine äußere Kraft \vec{F}_a an einem Körper/System an, so ändert sich dessen Impuls \vec{p} .

2.5.2 Experiment: Fahrbahn



Wagen fährt auf Luftkissen. Die Geschwindigkeit und der Impuls bleiben konstant, solange keine äußere Kraft einwirkt (Aufprall am Ende der Fahrbahn.)

$$p = m \cdot v$$

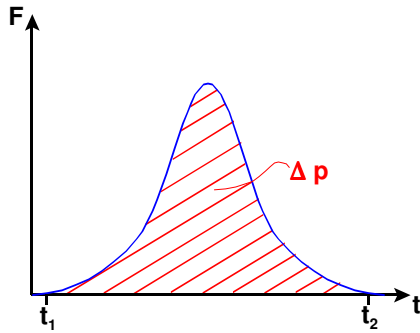
2.5.3 Beispiel: Kraftstoß

- zeitlich begrenzte Krafteinwirkung, z. B. Geschwindigkeitsänderung beim Auto von 100 km/h auf 120 km/h

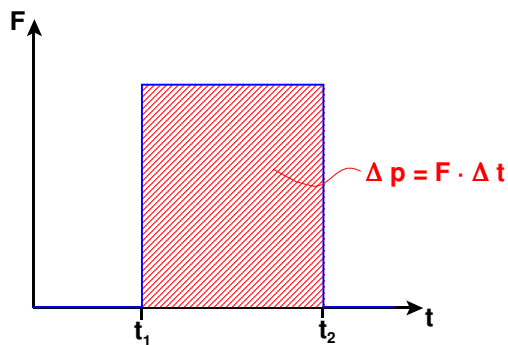
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Leftrightarrow \vec{F} \cdot dt = d\vec{p}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t) dt = \int_{p_1}^{p_2} dp = m \cdot \int_{v_1}^{v_2} dv$$
$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}(t) dt = \bar{p}_2 - \bar{p}_1 = \Delta \bar{p} = m \cdot \Delta \bar{v}$$

2.5.4 Diagramm: allgemein

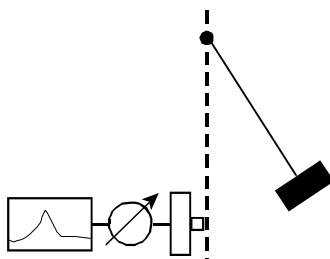


2.5.5 Diagramm: speziell



konstante Kraft, die nur zeitlich partiell zugeschaltet wird

2.5.6 Experiment: Piezohammer



Wird auf Piezokristall Druck ausgeübt, entsteht eine elektrische Spannung.

Fazit: Impuls eines Systems wird durch äußere Kraft geändert (nicht durch innere Kräfte).

2.5.7 Impulserhaltungssatz (IES)

$$\sum \vec{F}_a = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const.}$$

System von Körpern

$$\vec{p}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^k \vec{p}_i = \sum_{i=1}^k m_i \cdot \vec{v}_i = \text{const.}$$

Impulsaustauschvorgänge innerhalb eines Systems von Körpern ändern den Gesamtimpuls nicht.

Es gilt: **Zustand vor Ereignis = Zustand nach Ereignis**
 → bezogen auf den Impuls

$$\vec{p}_{\text{ges.vor}} = \vec{p}_{\text{ges.nach}}$$

- Beispiel: Billiard, Kernspaltung, Explosion

2.5.8 Experiment: Luftkissenfahrbahn



$$p_{\text{ges.vor}} = p_{\text{ges.nach}}$$

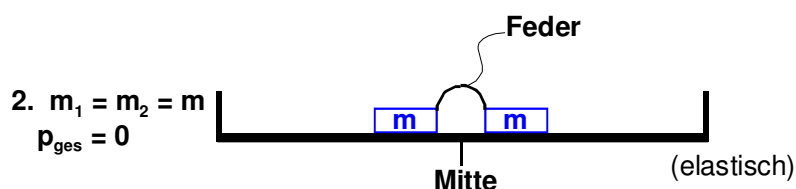
$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

zweiter Impuls = 0 (ruhender Wagen)

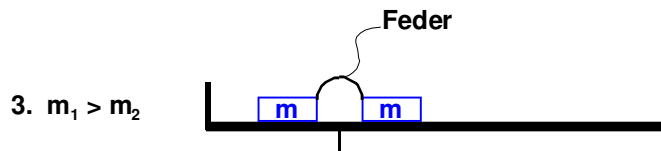
$$m_1 \cdot v_1 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

→ 2 Unbekannte, Energiesatz fehlt

Nach Stoß fährt der angestoßene Wagen mit der Geschwindigkeit des vorher fahrenden Wagens weiter, während der andere Wagen so lange im Stillstand verharrt, bis er ebenfalls vom anderen Wagen wieder angestoßen wird.



Die beiden Wagen fahren mit derselben Geschwindigkeit nach jedem Stoß.



Wagen treffen sich immer wieder an derselben Stelle (Massen vorher berechnet).

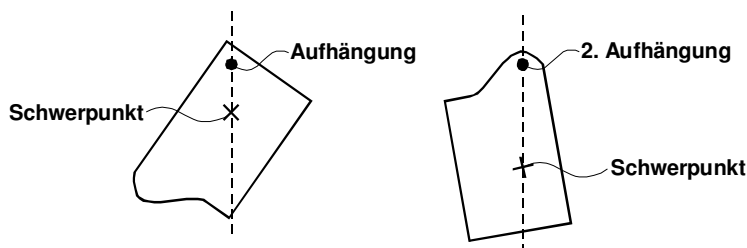
Fazit: Impuls bleibt erhalten

2.5.9 Schwerpunktsatz

System aus vielen starr oder elastisch gekoppelten Körpern.

- Beispiele: Turmspringer, ausgedehnte Körper

2.5.10 Experiment: Ermittlung des Schwerpunktes



Schnittpunkt beider Lotgeraden durch den Aufhängepunkt ergibt den Schwerpunkt.

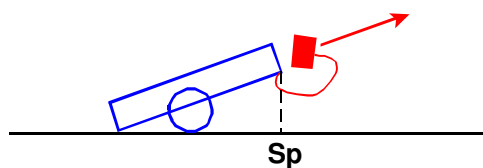
2.5.11 Experiment: Hantel mit ungleichen Massen

Wird in Luft geworfen.

Ergebnis: Hantel rotiert um Schwerpunkttachse.

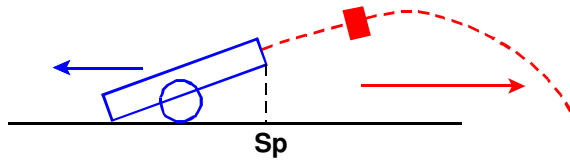
2.5.12 Experiment: Impulserhaltungssatz und Schwerpunktsatz

a) Gefesseltes Geschoss



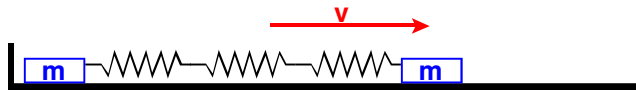
Kanone bewegt sich nicht

b) Freies Geschoss



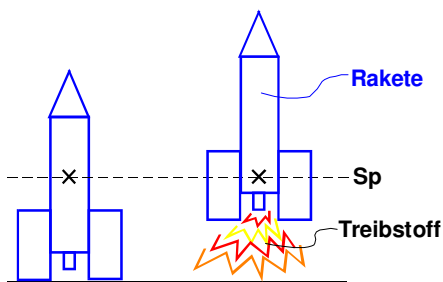
Kanone bewegt sich durch Rückstoss nach hinten

2.5.13 Experiment: Fahrbahn



2.5.14 Rakete: System mit veränderlicher Masse

Raketenstart aus Ruhe:



Bewegungsgleichung:

$$F_R = m_R \cdot a_R = F_G + F_{\text{Schub}}$$

mit F_R : Kraft ...; m_R : Masse ...; a_R : Beschleunigung der Rakete; F_{Schub} : Schubkraft

$$F_{\text{Schub}} = \dot{m} \cdot v_{\text{rel}}$$

mit \dot{m} : Massefluss; v_{rel} : relative Geschwindigkeit

$$\dot{m} = \frac{d}{dt} \cdot m \quad \left(\frac{\Delta m}{\Delta t} \right)$$

$$-\dot{m} \cdot (-v_{\text{rel}}) = \dot{m} \cdot v_{\text{rel}}$$

$$m_R(t) \cdot a_R = -m_R(t) \cdot g_n(r) + \dot{m} \cdot v_{\text{rel}}$$

m in Erdnähe:

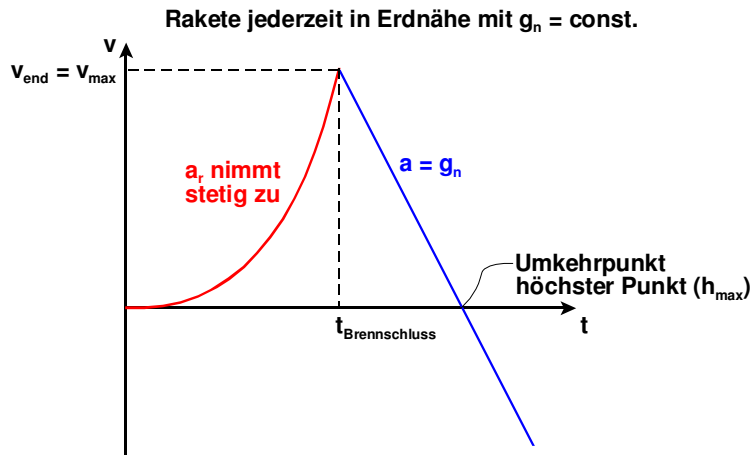
$$a_R = -g_n + \frac{\dot{m}}{(m_0 - \dot{m} \cdot t)} \cdot v_{\text{rel}}$$

mit m_0 : Startmasse (Rakete R und Treibstoff T)

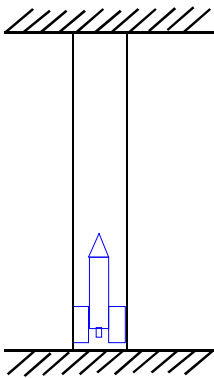
bei Brennschluss (Treibstoff verbraucht):

$$v_{\text{end}} = v_{\text{rel}} \cdot \ln \frac{m_T + m_{R,\text{leer}}}{m_{R,\text{leer}}}$$

Bewegung einer Rakete



Experiment: Rakete



a) Luft

ca. 2 m

b) Luft + Alustaub

fliegt doppelt so hoch

c) Luft + Wasser

fliegt am höchsten

Experiment: Raketenfahrzeug

Fahrzeug mit auströmender Gasflasche

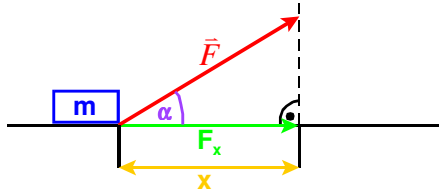
3. Arbeit, Leistung, Energie

3.1 Arbeit

Arbeit = Kraft · Weg

$$W = F_x \cdot x = F \cdot x \cdot \cos \alpha = \vec{F} \cdot \vec{x}$$

$$[W] = 1Nm = 1J$$



Wenn F nicht konstant:

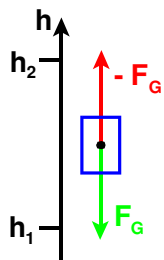
$$W = \int_1^2 dW = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(\vec{v}) d s$$

Spezieller Fall: F = const.

$$W_{1,2} = F \cdot \int_{s_1}^{s_2} d s = F_N \cdot \mu \cdot (s_2 - s_1)$$

3.1.1 Beispiele für Arbeit

Hubarbeit

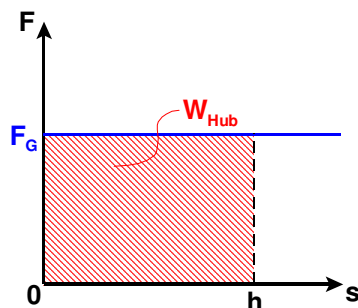


$$F_G = m \cdot g_n = - m \cdot g \cdot s$$

$$W_{Hub} = \int_{h_1}^{h_2} F d s = \int_{h_1}^{h_2} m \cdot g_n \cdot d s = m \cdot g_n \cdot (h_2 - h_1)$$

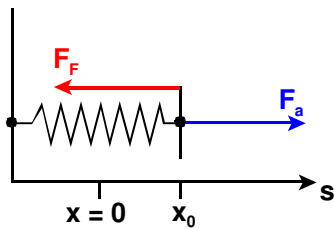
$$h_1 = 0 \Rightarrow h_2 = h$$

$$\rightarrow W_{Hub} = m \cdot g \cdot h$$



Spannarbeit

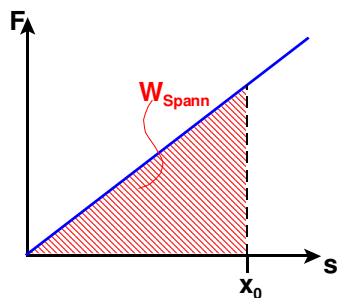
Hook'sches Gesetz: $F_F = - D \cdot x$



$$F_a = - F_F$$

$$W_{\text{Spann}} = \int_0^{x_0} F_a \, dx = \int_0^{x_0} D \cdot x \cdot dx$$

$$W_{\text{Spann}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_0^2$$

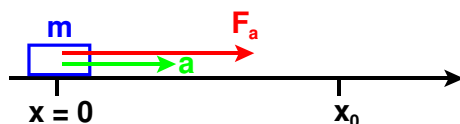


Beschleunigungsarbeit

Im Gegensatz zur Hub- und Spannarbeit, bei der statische Kräfte wirken, ist die Beschleunigungsarbeit durch eine dynamische Krafteinwirkung gekennzeichnet.

$$F_a = m \cdot a$$

$$W_B = \int \vec{F} \, d\vec{x} = \int_0^{x_0} m \cdot a \cdot dx = m \cdot a \cdot x_0$$



da $a = \text{const.}$:

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \wedge v = a \cdot t$$

→ nach t auflösen und gleichsetzen:

$$x_0 = \frac{v_0^2}{2a}$$

$$W_B = m \cdot a \cdot \frac{v_0^2}{2a} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$$

W_B hängt nur von der Endgeschwindigkeit ab ($m = \text{const.}$)!

→ Kraft F zwischen Anfang und Ende der Beschleunigung kann beliebig sein!

3.2 Leistung

Leistung = Arbeit/Zeit

$$P = \frac{dW}{dt} = \dot{W} = F(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = F(\vec{r}) \cdot \vec{v}$$

$$[P] = 1W = 1 \frac{Nm}{s} = 1 \frac{J}{s}$$

3.3 Energie

Die Fähigkeit (Eigenschaft) eines Systems, Arbeit verrichten zu können.

Allgemein: E mit $[E] = 1 \text{ J} = 1 \text{ Nm}$

3.3.1 Potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$$

3.3.2 Spannenergie (Sonderfall der potentiellen Energie)

$$E_D = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_0^2$$

3.3.3 Kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

3.3.4 Zusammenfassung: Energiesatz der Mechanik

$$W = \Delta E = \Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_D + \Delta E_{\text{kin}}$$

Zufuhr von Arbeit $\Delta W > 0$

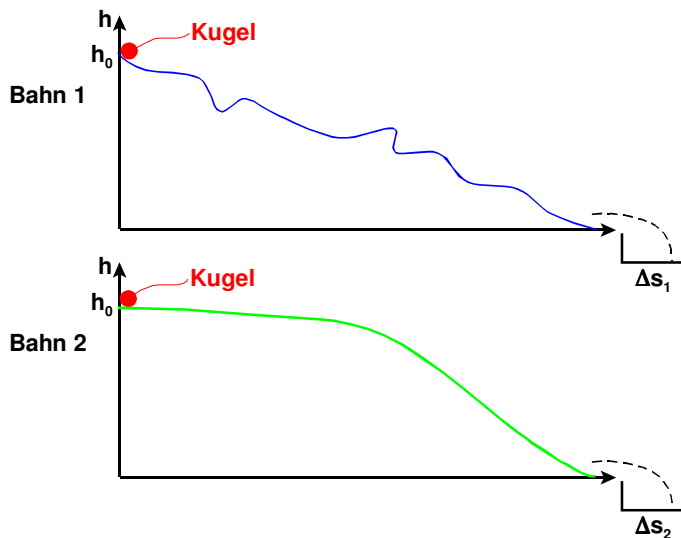
Abfuhr von Arbeit $\Delta W < 0$

Ändert sich die Energie nicht, ändert sich die Gesamtenergie der mechanischen Energien nicht.

$$\Delta E = 0 \Rightarrow E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}} + E_D + E_{\text{kin}} = \text{const.}$$

→ Energieerhaltungssatz (Axiom): gilt im mechanisch abgeschlossenen System.

3.3.5 Experiment: Fahrbahnen



Die Kugel auf der Bahn 1 erreicht das Ziel eher als die Kugel auf Bahn 2.

Länge: Bahn 1 > Bahn 2

Zeit: $\Delta t_1 < \Delta t_2$

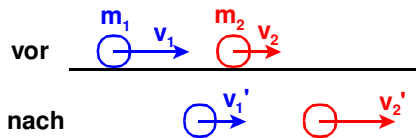
Weg: $\Delta s_1 = \Delta s_2 \rightarrow v_{\text{end},1} = v_{\text{end},2}$
 $E_{\text{ges},1} = E_{\text{ges},2} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \text{const.}$

$$m \cdot g_n \cdot h_0 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{end}}^2 = \text{const.}$$

Die Endgeschwindigkeiten sind gleich, die Beschleunigungsphasen sind unterschiedlich. Durch die unterschiedliche Krümmung, wird die Kugel auf Bahn 1 schneller beschleunigt.

4. Stoßgesetze

Problem: Zwei Körper, die zusammenstoßen



gegeben: m_1, m_2, v_1, v_2

gesucht: v_1', v_2' (bei zwei Körpern, 2 Unbekannte)

Lösung: 2 Gleichungen \rightarrow Impuls- und Energieerhaltungssatz

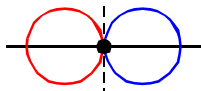
Unterscheidung:

- Stoß:

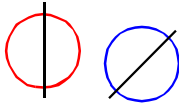
- elastisch (Energieerhaltungssatz gilt): $E_{\text{ges}} = E_{\text{ges}}'$
- inelastisch: $E_{\text{ges}} > E_{\text{ges}}'$
- unelastisch (beide Körper vereinigt): $E_{\text{ges}} \gg E_{\text{ges}}'$

- mögliche Formen:

- gerade zentral:



- schief:



4.1 Gerader, zentraler, elastischer Stoß



gesucht: v_1' , v_2'

Lösung: Impulserhaltungssatz gilt immer bei Stoßprozessen!

$$\vec{p}_{ges} = \vec{p}'_{ges}$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

$$(I) m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

$$E_{kin} = E_{kin}'$$

$$E_{kin,1} + E_{kin,2} = E_{kin,1}' + E_{kin,2}'$$

$$(II) \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2'^2$$

$$(III \text{ aus I}) m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2)$$

$$(IV \text{ aus II}) m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2)$$

$$(V \text{ aus IV}) m_1 (v_1 - v_1') (v_1 + v_1') = m_2 (v_2' - v_2) (v_2' + v_2)$$

$$(VI \text{ aus V:III}) v_1 + v_1' = v_2' + v_2$$

nach v_2' auflösen und in (I) einsetzen:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_1 + 2 \cdot m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

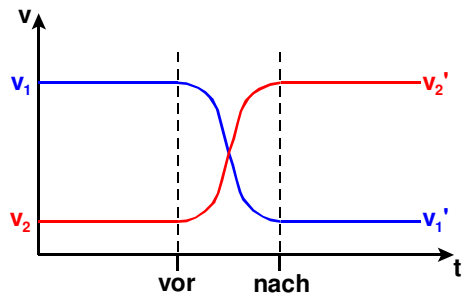
$$v_2' = \frac{2 \cdot m_1 \cdot v_1 + (m_2 - m_1) \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

4.1.1 Spezialfälle

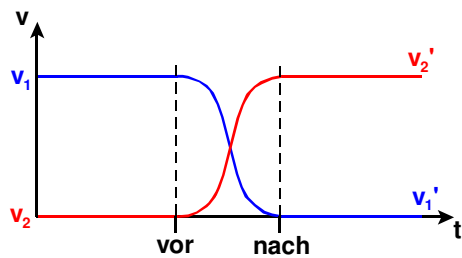
$$\underline{m_1 = m_2 = m}$$

$$\text{eingesetzt: } v_1' = 2 \cdot m \frac{v_2}{2 \cdot m} = v_2$$

$$v_2' = 2 \cdot m \frac{v_1}{2 \cdot m} = v_1$$



$$\underline{v_2 = 0 \wedge v_1' = 0 \wedge v_2' = v_1}$$



vollständiger Übertrag von Impuls und Energie, wenn die Massen gleich sind.

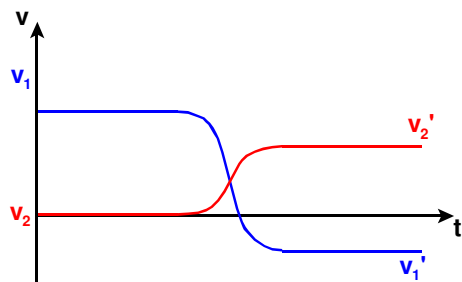
4.1.2 Ungleiche Massen

$$\underline{2 \cdot m_1 = m_2 \wedge v_2 = 0}$$

Eingesetzt in Formel:

$$v_1' = -\frac{1}{3} \cdot v_1 \wedge v_2' = \frac{2}{3} \cdot v_1$$

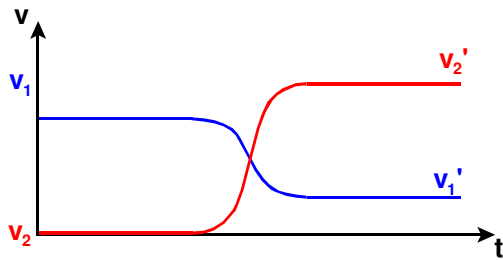
Digramm:



$$\underline{m_1 = 2 m_2 \wedge v_2 = 0}$$

$$v_1' = \frac{1}{3} \cdot v_1 \wedge v_2' = \frac{4}{3} \cdot v_1$$

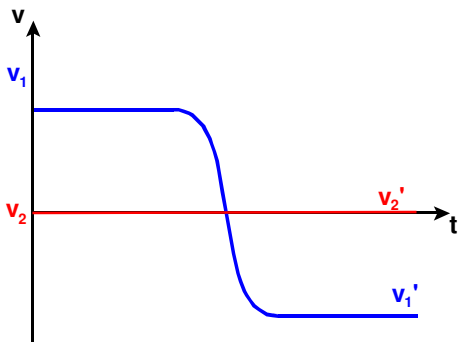
Diagramm:



$m_1 \ll m_2 \wedge v_2 = 0$ (starre Wand)

Annahme: $m_1 + m_2 = m_2 - m_1 = m_2$

$$v_1' = -v_1$$

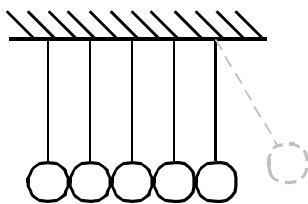


Hinweis: Reflexion entspricht maximaler Impulsänderung

$$\Delta p = 2 \cdot |p|$$

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

4.1.3 Experiment: Kugelkette



k: stoßende Kugel

l: wegfliegende Kugel

Es fliegen genauso viele Kugeln weg, wieviele auch stoßen. Warum?

Lösung:

$$\text{Impulserhaltungssatz: } k \cdot m \cdot v_1 = l \cdot m \cdot v_2 \quad (\text{I})$$

$$\text{Energieerhaltungssatz: } k \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = l \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \quad (\text{II})$$

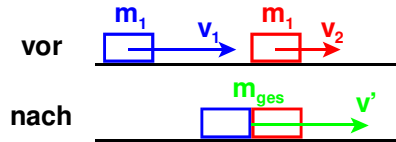
$$\text{I quadriert: } k^2 \cdot v_1^2 = l^2 \cdot v_2^2 \quad (\text{III})$$

$$\text{III:II: } k = l$$

4.2 Gerader, zentraler, unelastischer Stoß

$$m_1 + m_2 = m_{\text{ges}}$$

$$v_1' = v_2' = v'$$



Es gilt stets der Impulserhaltungssatz, nicht jedoch der Energieerhaltungssatz.

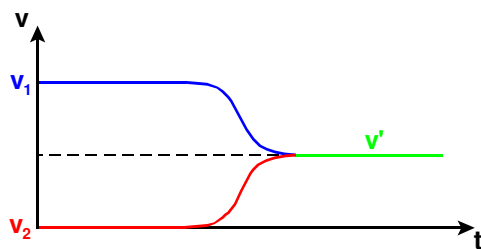
$$p_{\text{ges}} = p_{\text{ges}}'$$

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_{\text{ges}} \cdot v'$$

$$v' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_{\text{ges}}}$$

4.2.1 Spezialfall: $m_1 = m_2 = m \wedge v_2 = 0$

Experiment:



$$v' = m_1 \frac{v_1}{2m} = m \frac{v_1}{2m} = \frac{1}{2} v_1$$

Hier: Die Hälfte der Energie des fahrenden Wagens geht in Deformationsenergie über und geht damit verloren.

→ Energieverlust:

$$\Delta E = E_{\text{kin,vor}} - E_{\text{kin,nach}}$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m \cdot v'^2$$

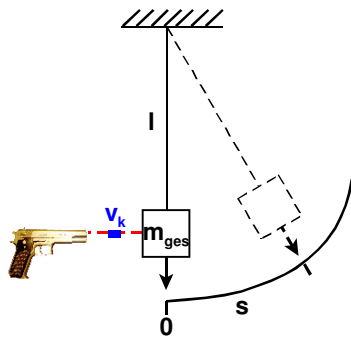
$$\Delta E = \frac{1}{2} m \left(v_1^2 - 2 \left(\frac{v_1}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{4} \cdot m \cdot v_1^2$$

4.2.2 Experiment: Ballistisches Pendel

$$l = 9,42 \text{ m}$$

$$m_{\text{ges}} = 3326 \text{ g}$$

Eine Pistolenkugel wiegt 4,5 g.



v_k ?

Ausschlag: 29 Skalenteile
 1 Skalenteil entspricht 1,5 cm
 $s = 43,5 \text{ cm}$

Lösung:

- 1.) unelastischer Stoß: Impulserhaltungssatz
- 2.) Energieerhaltungssatz (beim Pendel!): $E_{\text{kin,max}} = E_{\text{pot,max}}$

$$p_{\text{ges}} = p_{\text{ges}}'$$

$$m_K \cdot v_K + m_p \cdot v_p = m_{\text{ges}} \cdot v'$$

P: Pendel

$$v_p = 0$$

$$m_K \cdot v_K = m_{\text{ges}} \cdot v'$$

$$v_K = \frac{m_{\text{ges}}}{m_K} \cdot v'$$

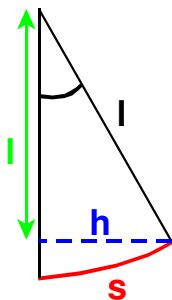
v' : (nach Stoß, am Pendel)

$$E_{\text{kin,max}} = E_{\text{pot,max}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_{\text{ges}} \cdot v'^2 = m_{\text{ges}} \cdot g_n \cdot h$$

$$v' = \sqrt{2 \cdot g_n \cdot h}$$

h:



$$l - h = l \cdot \cos\left(\frac{s}{l}\right)$$

$$h = l \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{s}{l}\right)\right)$$

$$h = 1,004 \text{ cm}$$

$$v' = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,004 \cdot 10^{-2} \text{ m}}$$

$$v' = 0,44 \text{ m/s}$$

$$v_K = \frac{m_{\text{ges}}}{m_K} \cdot v'$$

$$v_K = \frac{3326 \text{ g}}{4,5 \text{ g}} \cdot 0,44 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 325,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

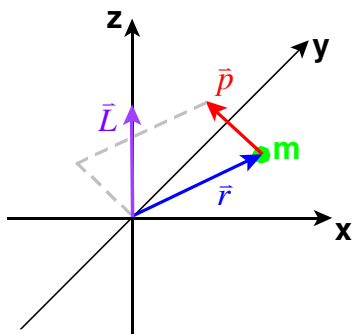
5. Drehbewegungen eines Massepunktes

5.1 Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

mit \vec{r} : Radiusvektor; \vec{p} : Impuls

$$[\vec{L}] = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$



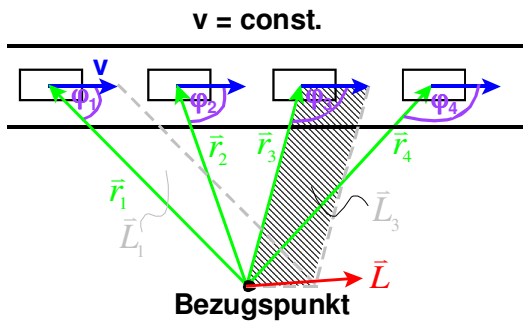
\vec{L} senkrecht zur Fläche, die von \vec{r} und \vec{p} aufgespannt wird.

L ist maximal, wenn \vec{r} senkrecht zu \vec{p} .

L = 0, wenn \vec{r} parallel zu \vec{p} .

L ist nicht an Kreisbewegung gebunden.

5.1.1 Beispiel: Drehimpuls bei linearer Bewegung

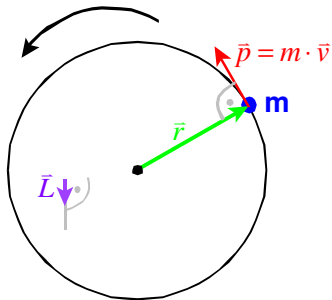


$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4$$

Der Winkel zwischen Impuls und Radiusvektor ändert sich kontinuierlich:

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 = \vec{L}_3 = \vec{L}_4$$

5.1.2 Beispiel: Kreisbewegung



$$|\vec{p}| = \text{const.}(t) \quad |\vec{r}| = \text{const.}(t)$$

Winkel zwischen \vec{r} , $\vec{p} = 90^\circ$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{const.} \quad (\text{Betrag und Richtung})$$

5.2 Bahndrehimpuls: \vec{L}

Experiment: reibungsfreie Kreisbewegung (auf vibrierender Unterlage)

Bahndrehimpuls zeigt senkrecht zur Ebene.

$$L = r \cdot p = r \cdot m \cdot v = r \cdot m \cdot r \cdot \omega = r^2 \cdot m \cdot \omega$$

$$\rightarrow L \sim \omega$$

$r^2 \cdot m$ als Konstante zusammengefasst: J Trägheitsmoment (Massenträgheitsmoment)

$$J = r^2 \cdot m$$

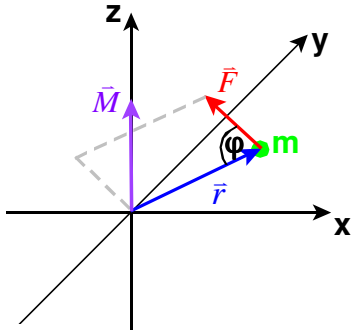
Vergleich: $p = m \cdot v$, $L = J \cdot \omega$

$\rightarrow m$ des Impulses entspricht J des Bahndrehimpulses

Hinweis: $J \sim m$ und $J \sim r^2$

5.3 Drehmoment

Definition: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$



Richtung des Drehmoments: Rechte-Hand-Regel
 → senkrecht zu Ortsvektor und Kraft

$$[\vec{M}] = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} = 1 \text{ Nm}$$

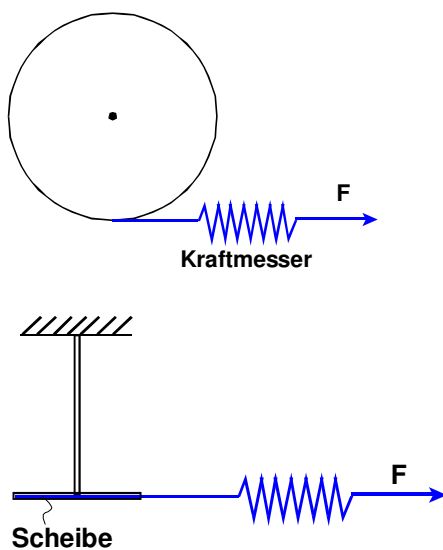
$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \varphi$$

Messung über Torsionsfederwaage:

→ analog zum Kraftmesser (Hook'sches Gesetz: $F = -D \cdot x$)

→ Drehmoment: $M = -D \cdot \varphi$

5.3.1 Experiment zur Torsionsfederwaage



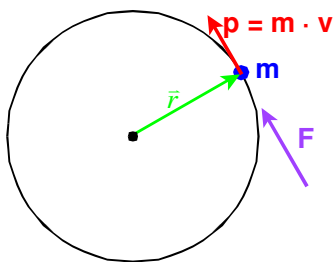
5.4 Vergleich: Translation und Rotation

Translation	Rotation
Kraft F mit $[F] = 1 \text{ N}$	Drehmoment M mit $[M] = 1 \text{ Nm}$
Impuls p mit $[p] = 1 \text{ Ns}$	Drehimpuls L mit $[L] = 1 \text{ Nm} \cdot \text{s}$
Strecke s mit $[s] = 1 \text{ m}$	Winkel φ mit $[\varphi] = 1 \text{ rad}$
Federkonstante D mit $[D] = 1 \text{ N/m}$	Winkelrichtgröße D^* mit $[D^*] = 1 \text{ Nm/rad}$

5.5 Drehimpulssatz, Drehimpulserhaltungssatz

Wie wird der Drehimpuls geändert? Durch Kraft.

Experiment:



reibungsfrei laufender Körper in Rotationsbewegung

Kraftstoß ändert Drehimpuls:

$$\Delta L = \int_{t_1}^{t_2} M dt = \int_{t_1}^{t_2} r \cdot F dt$$

Wenn r und F const.: $\Delta L = M \cdot \Delta t \Leftrightarrow M = \frac{\Delta L}{\Delta t}$

5.5.1 Allgemeiner Fall (Drehimpulssatz)

$$\vec{M}_a = \dot{\vec{L}}$$

5.5.2 Drehimpulserhaltungssatz

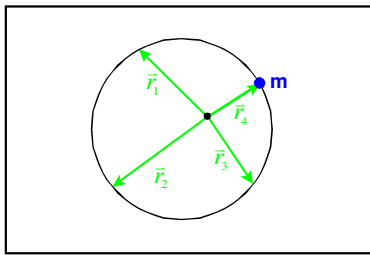
wenn $\vec{M}_a = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}$

Das heißt die Richtung und der Betrag des Drehimpulses bleiben erhalten.

5.5.3 Anwendungen/Beispiele

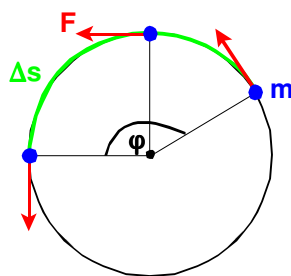
Planetenbahnen, Satellitenbahnen, Bahn des Mondes

5.5.4 Experiment



Radius wird verändert. Die Winkelgeschwindigkeit verändert sich entsprechend, da der Drehimpuls erhalten bleibt.

5.6 Arbeit bei der Kreisbewegung



linear:

$$W = \text{Kraft} \cdot \text{Weg}$$

Drehung:

$$W = F \cdot \Delta s$$

$$W = F \cdot r \cdot \Delta \varphi$$

$$W = M \cdot \Delta \varphi$$

Für $F \neq \text{const.}$ (allgemein \rightarrow differentiell):

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi) d\varphi$$

$$[W] = 1 \text{ J}$$

5.7 Leistung bei der Kreisbewegung

Leistung = Arbeit / Zeit

$$P = \frac{dW}{dt} = M \cdot \dot{\varphi} = M \cdot \omega$$

$$[P] = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ W}$$

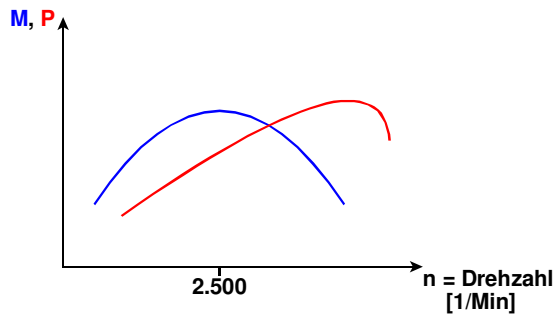
Wenn Anfang und Ende bekannt:

$$P = \frac{W}{\Delta t}$$

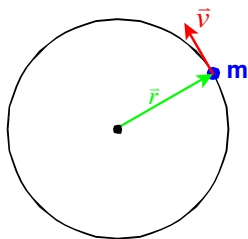
Hinweis:

Beispiel Motor

$$P = M \cdot \omega$$



5.8 Energie bei der Kreisbewegung



$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$v = r \cdot \omega \Rightarrow E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega^2$$

$$m \cdot r^2 = J \Rightarrow E_{kin}^{(rot)} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$$

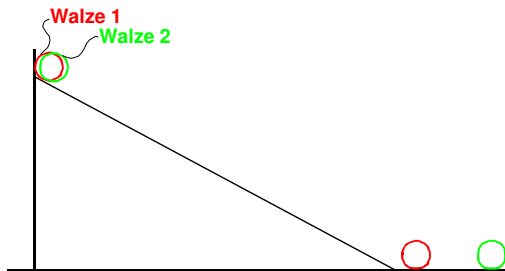
mit $E_{kin}^{(rot)}$: Rotationsenergie; J: Trägheitsmoment
 $[E_{kin}] = 1 \text{ J}$

5.8.1 Energiesatz der Drehbewegung

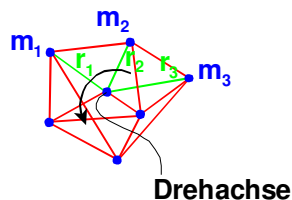
$$W = E_{kin,2}^{(rot)} - E_{kin,1}^{(rot)} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot (\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

5.9 Drehbewegung eines starren Körpers, Trägheitsmoment

5.9.1 Experiment



Beide Walzen (rot und grün) haben die gleiche Masse, bestehen aus demselben Material und haben die gleiche Geometrie. Die Walzen werden gleichzeitig losgelassen, die rote kommt jedoch früher unten an als die grüne. Warum?



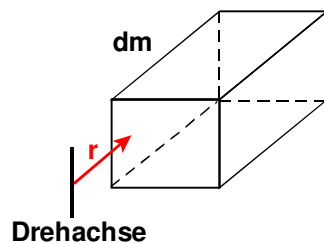
Massepunkt:

$$J = m \cdot r^2$$

System von Massepunkten:

$$J_{ges} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2$$

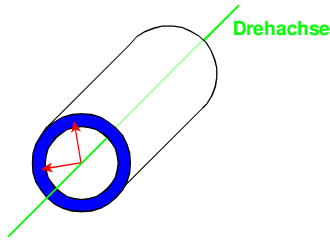
homogener ausgedehnter Körper:



ausgedehnter Körper: $J_{ges} = \int_{\text{Körper}} r^2 dm$

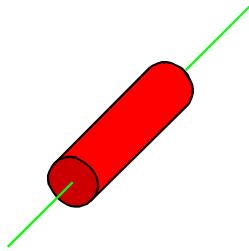
Entscheidend für J ist die Bezugsachse!

a) Dünnwandiger Zylinder/Ring



$$J_{\text{Zylinder,hohl}} = \int_{\text{Körper}} r^2 dm = r^2 \cdot m$$

b) Homogener Vollzylinder/Scheibe



$$J_{\text{Zylinder,voll}} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot m$$

Lösung des Problems des Experiments

Energieerhaltungssatz

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}}^{(\text{rot})} + E_{\text{kin}}^{(\text{transl})}$$

$$\text{const.} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot (J_w + m \cdot r^2)$$

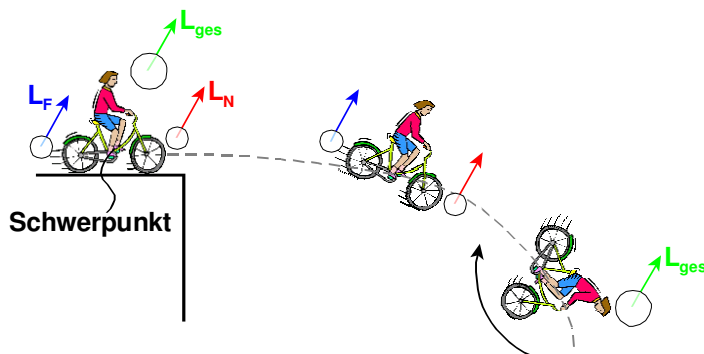
$J_w: 1 \rightarrow 1/2$

Unterschied: ~ 14 %

5.10 Was passiert mit einem Fahrradfahrer, der einen Abgrund abstürzt?

Der Schwerpunkt folgt der Wurfparabel (waagerechter Wurf).

Vollführt das Fahrrad dabei eine Drehbewegung?



Beide Räder haben den gleichen Drehimpuls.

5.11 Eigendrehimpuls

$$\vec{L}_E = \tilde{J} \cdot \vec{\omega}$$

mit \tilde{J} : Trägheitstensor (im Allgemeinen 9 Komponenten)

$$\vec{L} \parallel \vec{\omega} \rightarrow J \text{ skalar}$$

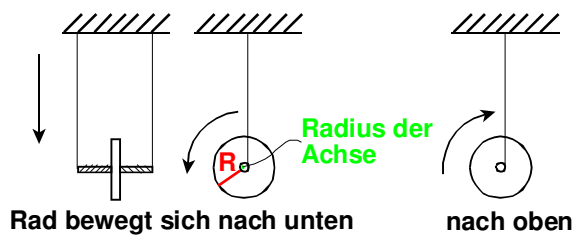
5.12 Drehimpulssatz für den starren Körper

Änderung durch ein äußeres Moment

$$\vec{M}_a = J \cdot \dot{\vec{\omega}} = J \cdot \vec{\alpha}$$

mit $\vec{\alpha}$: Winkelbeschleunigung

5.13 Experiment: Maxwellscheibe bzw. Maxwellrad

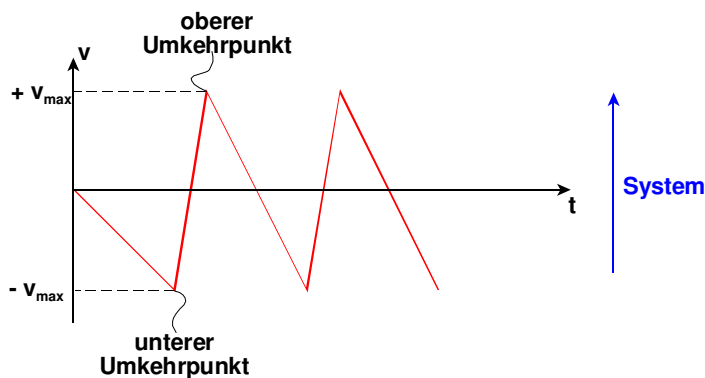


Energieerhaltungssatz:

$$E_{ges} = const. = E_{pot} + E_{kin}^{(rot.)} + E_{kin}^{(transl.)}$$

$$E_{ges} = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega^2$$

mit m: Masse des Rades (Masse der Achse wird vernachlässigt)



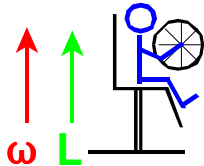
5.14 Drehimpulserhaltungssatz für starre Körper

$$\vec{M}_a = 0 \Rightarrow \vec{L}_E = \tilde{J} \cdot \vec{\omega} = \text{const.}$$

J = skalar bei geeigneter Drehachse

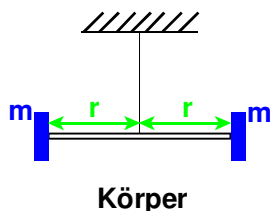
5.14.1 Experiment: Drehstuhl mit sich drehendem Rad

Ergebnis: $L_E = \text{const.}$ (Vertikalkomponente)



Stuhl anfangs in Ruhe. Rad wird gekippt. Damit die Vertikalkomponente konstant bleibt, bewegt sich der Stuhl. Der Drehstuhl wird in Drehbewegung versetzt. Das dadurch auftretende Gegenmoment gleicht das Moment des nun horizontal ausgerichteten Rades aus und so ändert sich der Drehimpuls nicht.

5.15 Experiment: Messung des Trägheitsmomentes



Hantel wird in Drehung versetzt. Über die Kreisfrequenz der Drehschwingung lässt sich das Trägheitsmoment berechnen.

Kreisfrequenz: ω

$$\omega = \sqrt{\frac{D^*}{J}} \Leftrightarrow J = \frac{D^*}{\omega^2}$$

mit D^* : Rückstellmoment (hier: 0,8 Nm); J: Trägheitsmoment

$$m = 0,6 \text{ kg}$$

$$r = 0,15 \text{ m}$$

$$T = 8,8 \text{ s (Periodendauer)}$$

$$\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \dots$$

Kontrolle:

$$J_{\text{Hantel}} = 2 \cdot m \cdot r^2 = 2 \cdot 0,6 \text{ kg} \cdot (0,15 \text{ m})^2 = 0,027 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Entscheidend ist immer die Drehachse!

5.15.1 Drehachse außerhalb des Schwerpunktes

$$L_{\text{ges}} = L_{\text{Bahn}} + L_E$$

(System: Erde-Sonne)

$$L_{\text{ges}} = m \cdot R^2 \cdot \vec{\omega}_{\text{Bahn}} + J_{\text{Körper}} \cdot \vec{\omega}_{\text{Körper}}$$

mit R: Radius der Bahn

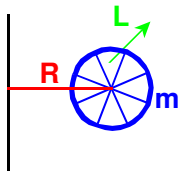
5.15.2 Experiment: Drehstuhl

$$L_{\text{ges}} = L_{\text{Bahn}} + L_E$$

$$L_{\text{ges}} = m \cdot R^2 \cdot \omega + J_{\text{Rad}} \cdot \omega$$

$$L_{\text{ges}} = (m \cdot R^2 + J) \cdot \omega$$

Mit $m \cdot R^2$: Steiner'scher Term

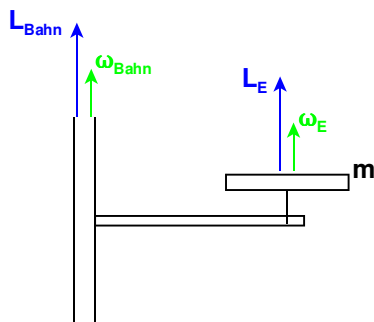


5.15.3 Steiner'scher Satz

Erinnerung: $L_{\text{ges}} = L_E + L_{\text{Bahn}} = J_K \cdot \omega_E + m \cdot R^2 \cdot \omega_{\text{Bahn}}$

Experiment: Fall 1

$$L_{\text{ges}} = 0 + L_{\text{Bahn}} = 0 + m \cdot R^2 \cdot \omega_{\text{Bahn}}$$



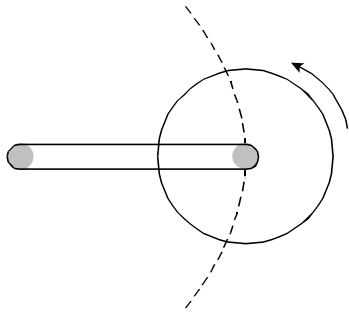
Experiment: Falle 2 (starrer Körper)

$$\omega_E = \omega_{\text{Bahn}} = \omega$$

$$L_{\text{ges}} = L_E + L_{\text{Bahn}} = J_K \cdot \omega_E + m \cdot R^2 \cdot \omega_{\text{Bahn}} = (J_K + m \cdot R^2) \omega$$

$$m \cdot R^2 = J_{\text{ges}}$$

$$\text{Steiner: } J_{\text{ges}} = J_{\text{Körper}} + J_{\text{Steiner}}$$

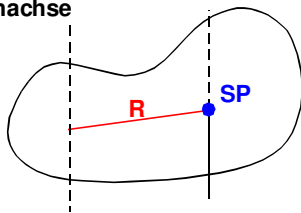


Da abgeschlossenes System:

$$L_{\text{ges, Fall1}} = L_{\text{ges, Fall2}}$$

$$J_{\text{Bahn}} \cdot \omega_{\text{Fall1}} = J_{\text{ges}} \cdot \omega_{\text{Fall2}}$$

Drehachse



5.16 Kreisel-Präzession

Kräftefreier Kreisel: $\vec{L} = \text{const.}$

→ dass heißt: Betrag und Richtung des Drehimpulses ändern sich nicht

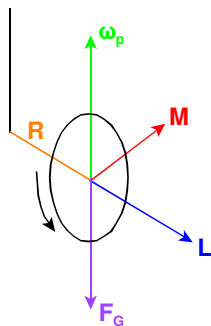
Änderung von L durch äußeres Moment (Drehimpulssatz!)

Bisher: $\vec{M} \parallel \vec{L} \rightarrow$ Betragsänderung

Jetzt: $\vec{M} \perp \vec{L} \rightarrow$ Richtungsänderung

5.16.1 Experiment

1.) Einseitige Aufhängung

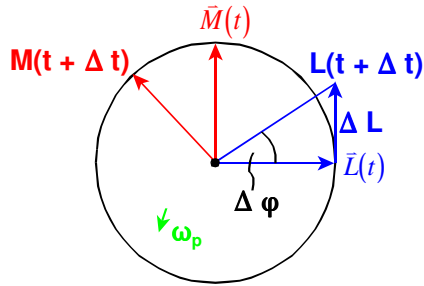


$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$$

2.) $\vec{M} \perp \vec{L} \rightarrow$ Auslenkung

$$\vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta \vec{L} = \vec{M} \cdot \Delta t$$

während Δt Änderung der Richtung von \vec{L} um $\Delta \varphi$



$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \omega_p$$

→ Präzessionskreisfrequenz

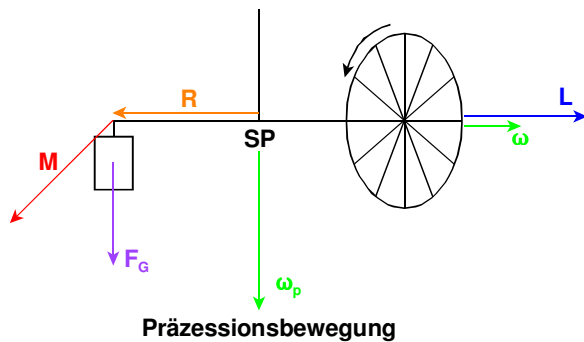
$$\Delta \varphi = \frac{\Delta L}{L} = \frac{M \cdot \Delta t}{L} \quad \bar{\omega}_p = \frac{\vec{M}}{\vec{L}} = \frac{\vec{M}}{J \cdot \vec{\omega}}$$

5.16.2 Satz vom gleichsinnigen Parallelismus

Ein Kreisel verhält sich unter dem Einfluss einer Störung (Drehmoment, Zwangsdrehung) so, dass er versucht, die Richtung von L auf kürzestem Weg gleichsinnig parallel zum Vektor der Störung einzustellen.

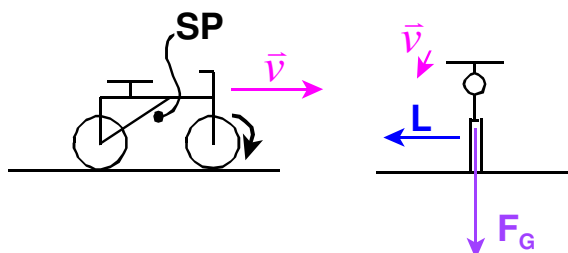
5.16.3 Experiment

$$\vec{M}_a = \vec{R} \times \vec{F}_G$$



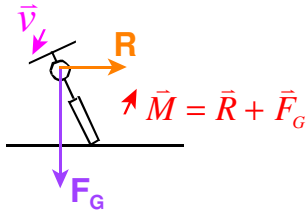
5.16.4 Anwendung: Fahrrad

1.) Freihändig

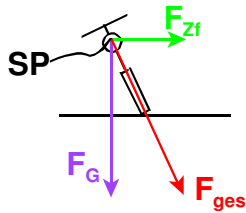


Sobald Kurvenfahrt vorliegt, gilt:

$$F_{\text{ges}} = F_G + F_{\text{Zf}}$$

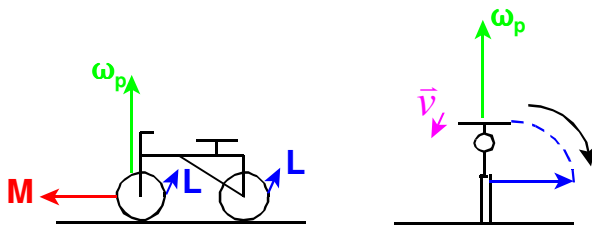


Zentrifugalkraft: $F_{\text{Zf}} = m \cdot \frac{v^2}{r}$



2.) Zwangsdrehung mit dem Lenker

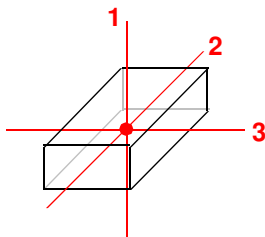
Lösung: Satz vom gleichsinnigen Parallelismus



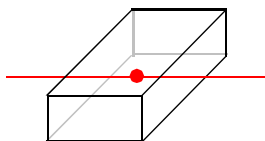
Dabei in die „Kurve legen“

5.17 Hauptträgheitsachsen

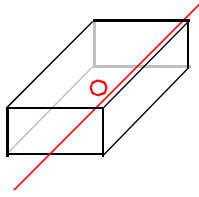
Achsen 1, 2 und 3 sind freie Achsen



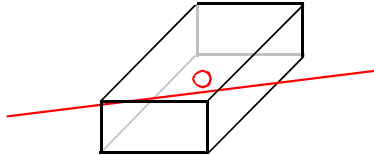
5.17.1 Experiment



$J_{\text{max}} \rightarrow$ stabile Rotation



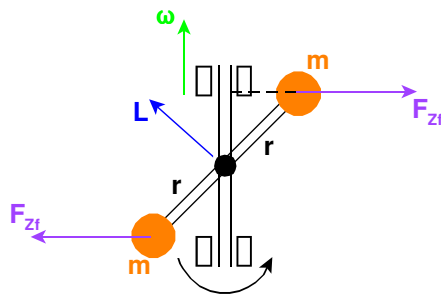
$J_{\min} \rightarrow$ halbstarbale Rotation



$J_{\text{mittel}} \rightarrow$ instabile Rotation

Ergebnis: Alle Körper streben letztlich eine Rotation um eine freie Achse mit J_{\max} an.

5.17.2 Zentrifugalmomente



$$F_{Zf} = m \cdot r \cdot \omega^2$$

$$\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$$

\vec{L} ändert sich kontinuierlich

$\rightarrow M \neq 0$

\rightarrow Lagerkräfte

$$\vec{L} = \tilde{J} \cdot \vec{\omega}$$

System strebt aufgrund der Zentrifugalkräfte Rotation mit J_{\max} an.

$$\text{Energie } E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$$

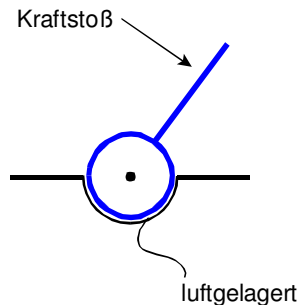
\rightarrow wenn J maximal ist, dann wird ω minimal

\rightarrow energetisch günstigster Zustand

6. Momentstoß → Nutation

Folge: Trennen der Parallelorientierung von \vec{L} und $\vec{\omega}$

Experiment:



6.1 Nutationsfrequenz

$$\omega_N = \frac{L}{J_x}$$

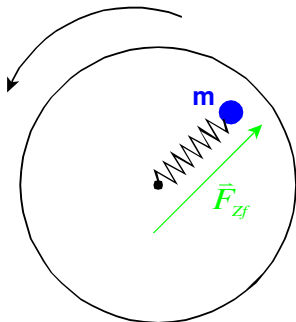
7. Bewegung in rotierenden Bezugssystemen

z.B. auf der Erde

7.1 Zwei Trägheitskräfte

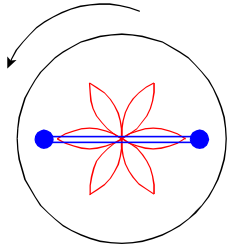
7.1.1 Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_{Zf} = m \cdot \vec{r} \cdot \vec{\omega}^2 = m \cdot \frac{\vec{v}^2}{\vec{r}}$$



7.1.2 Corioliskraft

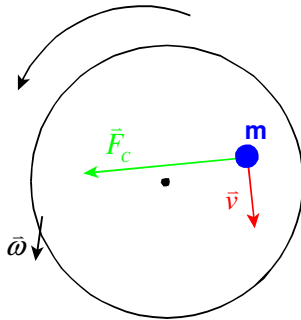
Existiert nur im rotierenden System! Scheinkraft wie Zentrifugalkraft.
Beispiel: Foucault'sches Pendel



Zur Erdoberfläche hin betrachtet bleibt die Richtung der Schwingung erhalten, zur rotierenden Scheibe jedoch nicht.

Definition: $\vec{F}_C = 2 \cdot m \cdot (\vec{v} \times \vec{\omega})$

mit v : Geschwindigkeit im rotierenden System; ω : Winkelgeschwindigkeit



Anwendungen:

- Meteorologie: Wirbelstürme (Passatwinde)
- Milchstraße: Bewegung der Sternenhaufen

8. Gravitation

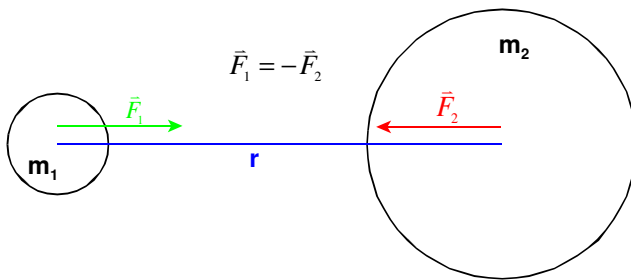
Eigenschaft der Materie: schwere Masse
 → alle Körper ziehen sich gegenseitig an.

8.1 Newton 1667: Gravitationskraft

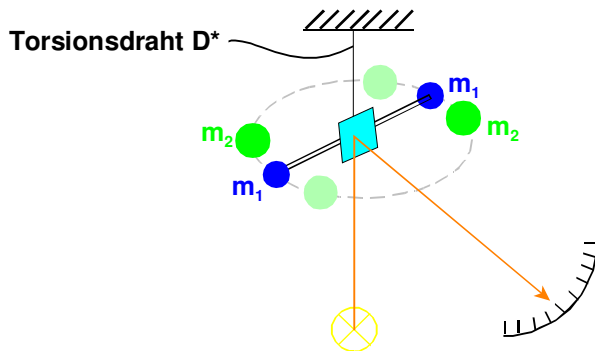
$$\vec{F}_G = \gamma \cdot m_1 \cdot \frac{m_2}{r^2} \cdot \vec{e}_R$$

mit \vec{F}_G : Gravitationskraft; γ : Gravitationskonstante (Proportionalitätskonstante); m_1 : Masse des Körpers 1; m_2 : Masse des Körpers 2; r : Abstand beider Körper; \vec{e}_R : Einheitsvektor (ändert nicht Betrag von \vec{F}_G , aber gibt die Richtung von \vec{F}_G an)

$$\gamma = 6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}$$



8.1.1 Experimentelle Bestimmung von γ : Cavendish-Waage (1798)



$$F = \gamma \cdot m_E \cdot \frac{m_K}{r_E^2} \cdot \vec{e}_R$$

mit m_E : Masse der Erde; m_K : Masse des Körpers; r_E : Radius der Erde

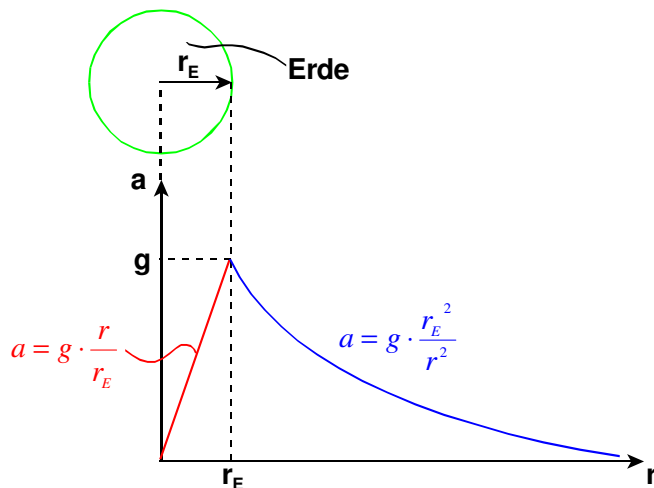
$$\gamma \cdot \frac{m_E}{r_E^2} \cdot \vec{e}_R = \vec{g} = 9,81 \frac{m}{s^2}$$

mit \vec{g} : Ortsfaktor, Erdbeschleunigung, Gravitationsfeldstärke

bei bekanntem Erdvolumen und m_E : $\rho_E = 5,51 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

mit ρ_E : mittlere Dichte der Erde

8.1.2 Verlauf der Gravitationsfeldstärke



8.1.3 Anwendung: Kepler'schen Gesetze

1. Kepler'sches Gesetz

Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Kepler'sches Gesetz

Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten die gleichen Flächen ("konstante Flächengeschwindigkeit").

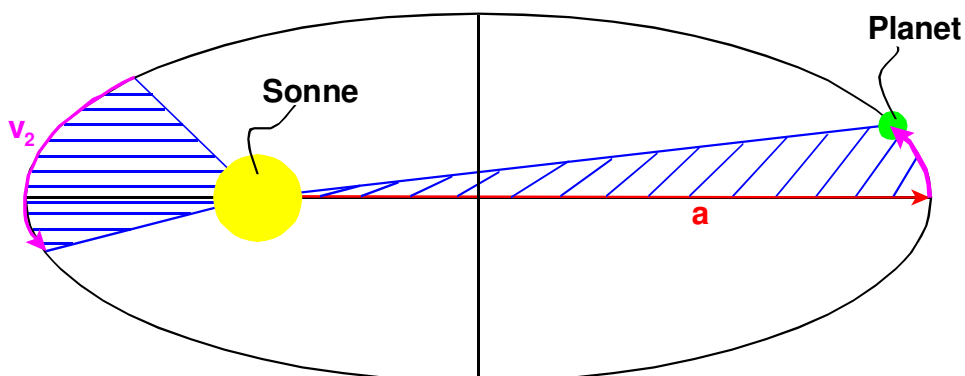
3. Kepler'sches Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Umlaufbahnen.

$$U^2/a^3$$

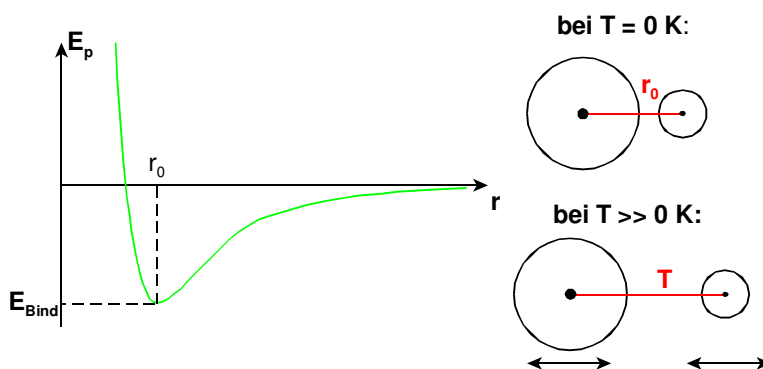
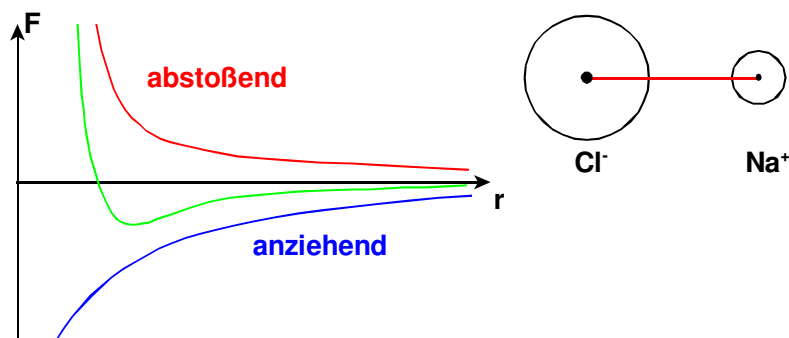
mit U : Umlaufzeit; a : große Halbachse

→ Bestimmung der Planetenmassen



9. Mechanik deformierbarer Körper

Kondensierung von Materie:



Bindungstypen:

- Ionenbindung
- homöopolare Bindung
- van-der-Waals-Bindung

Abstand der Atome ist temperaturabhängig

→ Folge: Die Aggregatzustände

- (Bose-Einstein-Kondensat)
- fest, flüssig-kristallin
- flüssig
- gasförmig
- Plasma

9.1 Festkörper

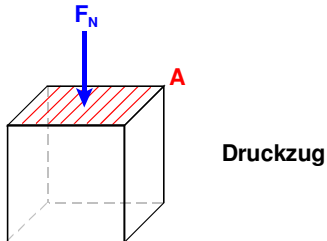
- Ionenkristalle: NaCl
- homöopolare Kristalle: Silicium, Diamant
- van-der-Waals-Kristalle: Molekülkristalle (Naphtalin)
- Metallkristalle: freie Elektronen

9.1.1 Verhalten unter Spannung

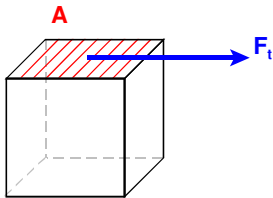
Definition: Spannung = Kraft/Fläche

$$p = \frac{F}{A} \text{ mit } [p] = \frac{N}{m^2}$$

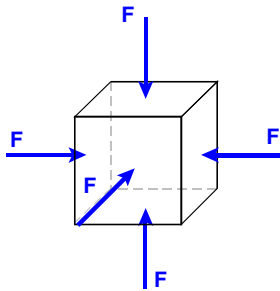
- Normalspannung: $\sigma = \frac{F_N}{A}$



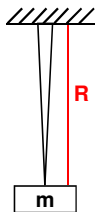
- Tangentialspannung: $\tau = \frac{F_t}{A}$ wobei $F_t \parallel A$



- allseitiger/hydrostatischer Druck: $p = \frac{F}{A}$



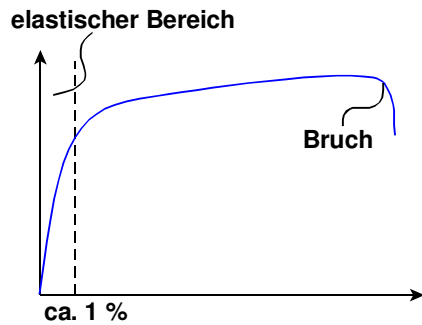
Experiment: Normalspannung



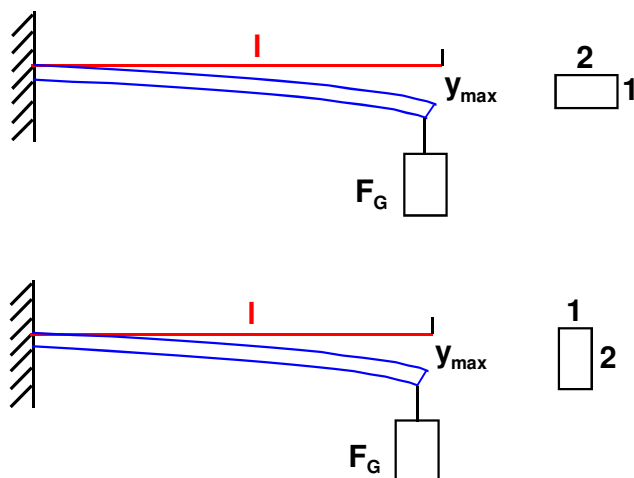
Hook'sches Gesetz: $\sigma = E \cdot \varepsilon$

mit $\sigma = \frac{F_N}{A}$; E: Elastizitätsmodul; $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

Überdehnung → bleibende Verformung



Elastische Eigenschaften werden beschrieben durch 4 elastische Konstanten. Ermittlung meist experimentell:



$$\text{Biegemoment: } M = E \cdot J_A \cdot \frac{l}{R}$$

mit E: elastisches Moment; l: Länge; R: Krümmungsradius

$$\text{Flächenmoment: } J_A = \int y^2 dA$$

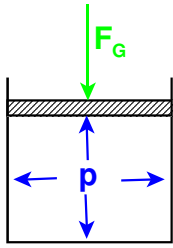
$$J_K = \frac{1}{12} \cdot a \cdot h^3$$

9.2 Hydro- und Aerostatik

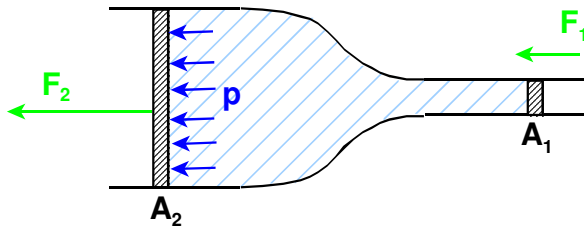
Flüssigkeiten seien inkompressibel

9.2.1 Flüssigkeit ohne Schweredruck

- Druckkraft ist orthogonal zu A
- Druck wirkt radial



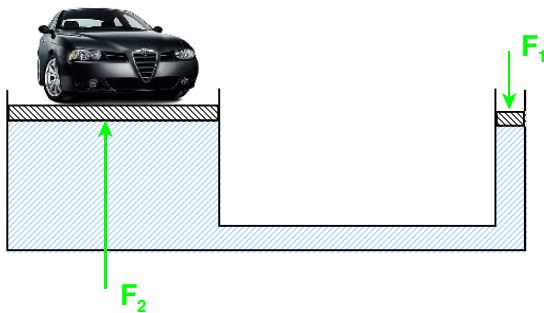
Anwendung: Krafttransformator



$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

daraus folgt die Beziehung: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}$

Hydraulische Presse:

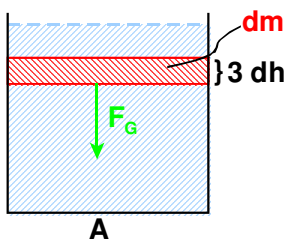


9.2.2 Flüssigkeit mit Schweredruck

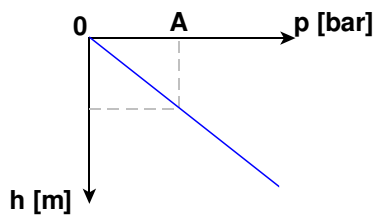
$$dp = \frac{dF}{A} = \frac{dm \cdot g_n}{A} = \frac{\rho \cdot dV \cdot g_n}{A} = \frac{\rho \cdot A \cdot dh \cdot g_n}{A}$$

$$p = \rho \cdot g_n \cdot h$$

mit ρ : Dichte der Flüssigkeit



Faustregel: Auf 10 Meter Tiefe im Wasser steigt der auf z.B. einen Taucher wirkende Druck um 1 bar.



9.2.3 Auftrieb

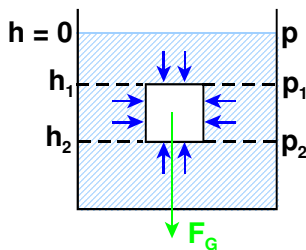
(Archimedes)

$$F_A = A \cdot \Delta p \text{ mit } \Delta p = p_2 - p_1$$

$$F_A = A \cdot \rho \cdot g_n \cdot \Delta h$$

$$F_A = V \cdot g_n$$

$$F_A = m_{fl} \cdot g_n$$

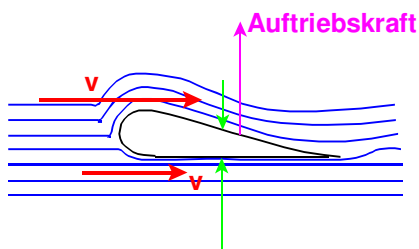


$F_A > F_G$: Körper schwimmt

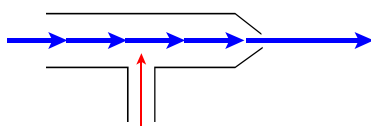
$F_A = F_G$: Körper schwebt

$F_A < F_G$: Körper sinkt

Auftrieb bei den Tragflächen eines Flugzeugs



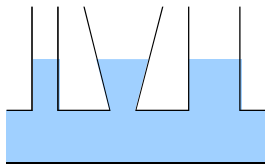
Anwendung bei der Wasserstrahlpumpe



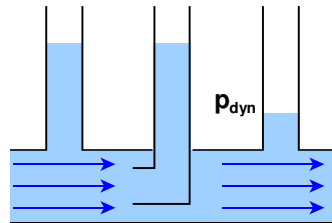
9.2.4 Kommunizierende Gefäße/Röhren

Bezeichnung für oben offene und unten miteinander verbundene Gefäße. Der Pegelstand ist bei einer nicht strömenden, homogenen Flüssigkeit in

allen Röhren gleich hoch, unabhängig von der Form der Gefäße, da der Luftdruck überall konstant ist.

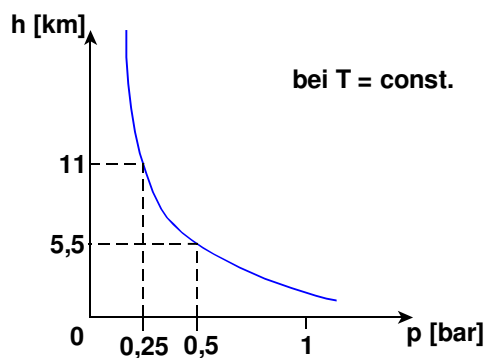


Strömt die Flüssigkeit allerdings, verhält es sich anders:



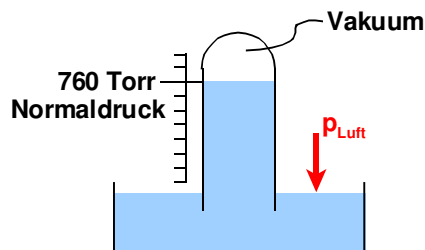
9.2.5 Barometrische Höhenformel

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g_n \cdot h}{p_0}}$$



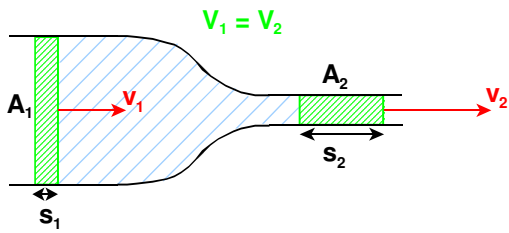
9.2.6 Torricelli: Normaldruck

760 Torr bzw. mm Hg entsprechen 1013,25 mbar bzw. hPa



9.3 Hydro- und Aerodynamik

Kontinuitätsgleichung: inkompressibel



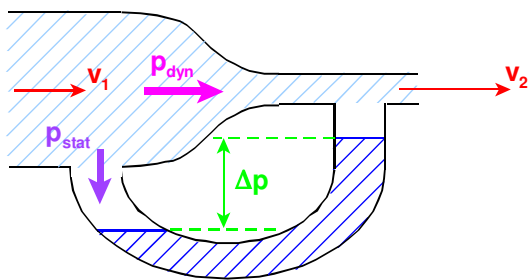
$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

9.3.1 Ideale Strömung

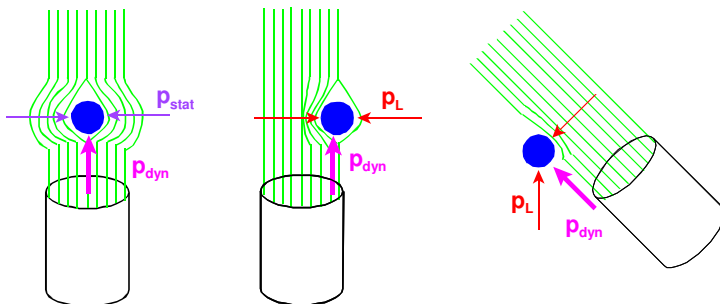
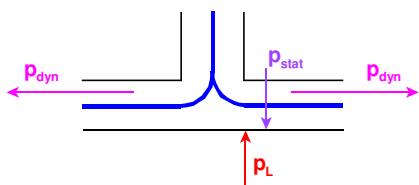
Gesetz von Bernoulli:

$$p_0 = p_{\text{stat}} + p_{\text{dyn}}$$

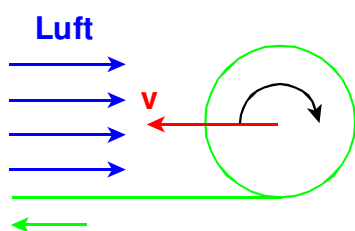
$$p_0 = p_{\text{stat}} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$$



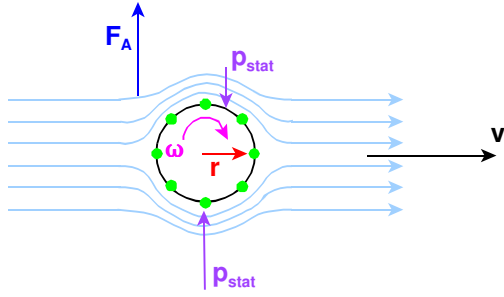
9.3.2 Reale Strömungen



Magnuseffekt bei realen Strömungen



$$V' = V + \omega \cdot r \quad V'' = V - \omega \cdot r$$



II. Elektrizität

1. Strom und Ladung

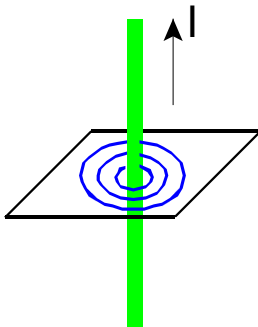
Elektrischer Strom hat drei Merkmale:

- magnetische Wirkung
- thermische Wirkung
- chemische Wirkung

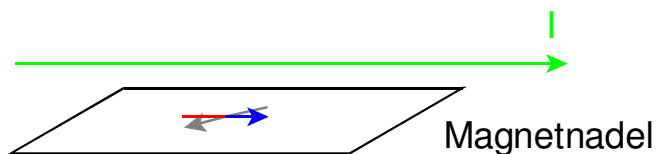
1.1 Magnetische Wirkung

1.1.1 Experimente

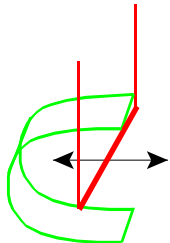
- Strom erzeugt kreisförmiges Magnetfeld orthogonal um die Stromrichtung:



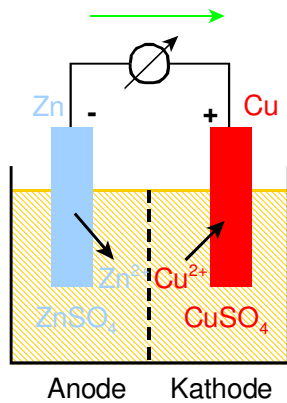
- Magnetfeld um Leiter hat Vektoreigenschaft:



- Strom durch Pendel im Magnetfeld:



1.2 Chemische Wirkung



1.3 Elektrischer Strom - Definition und Dimension

Definition (seit 1948): absolut Ampere, Kraftwirkung

$$[I] = 1 \text{ A} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Was ist Strom (Gleichstrom)?

Definition: $\text{Strom} = \frac{\text{fließende Ladung}}{\text{Zeit}}$

$$I = \frac{Q}{\Delta t} \quad \text{oder differentiell: } \int I = \frac{dQ}{dt}$$

Ladung

Folgt aus dem Stromgesetz:

$$Q = \int_{\Delta t} I \cdot dt \quad \text{mit } [Q] = 1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$$

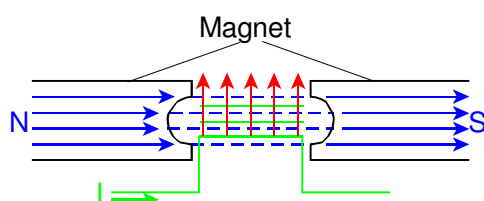
mit C: Coulomb

Elementarladung (Quant):

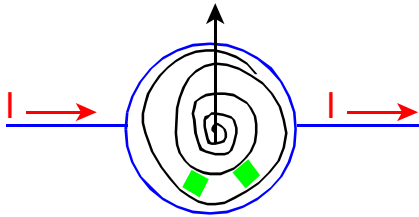
$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot \text{C}$$

1.4 Messung des Stroms

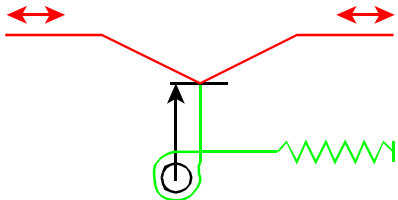
1.4.1 Drehspuleninstrument



1.4.2 Weicheiseninstrument



1.4.3 Hitzdrahtinstrument



2. Elektrische Spannung

Charakterisiert durch zwei Merkmale:

- 1.) Ursache für den elektrischen Strom
- 2.) Körper mit unterschiedlicher Spannung ziehen sich gegenseitig an

2.1 Dimension

$$[U] = 1V = 1 \frac{J}{A \cdot s} = 1 \frac{J}{C}$$

- Spannungsnormal (klassisch)

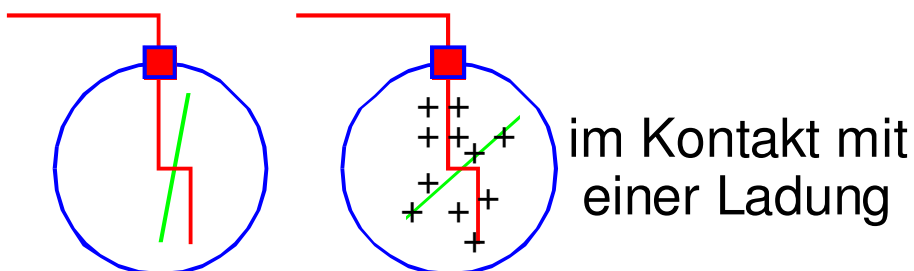
→ Westonnormalelement (Hg-Cd-Zelle)

→ $U = 1,018650 \text{ V}$

→ heute mittels supraleitender Tunnelkontakte, Genauigkeit 10^{-10}

2.2 Spannungsmessung

Elektrometer (Elektroskop):



3. Elektrische Widerstände

3.1 Definition des Widerstandes und der Leitfähigkeit

Der Widerstand eines elektrischen Leiters ist:

$$R = \frac{\text{Spannung am Leiter}}{\text{Strom im Leiter}}$$

$$R = \frac{U}{I} \quad \text{mit } [R] = 1\Omega$$

→ Ohm'sches Gesetz

Leitfähigkeit eines Leiters ist:

$$\Lambda = \frac{1}{R} \quad \text{mit } [\Lambda] = 1S = 1\frac{1}{\Omega}$$

mit S: Siemens

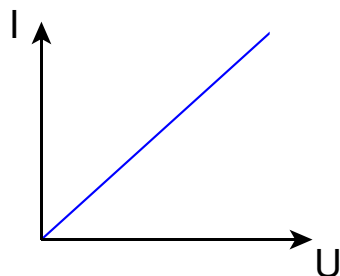
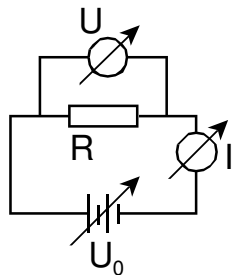
Schaltsymbol eines Ohm'schen Widerstandes:



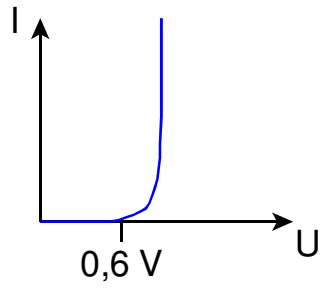
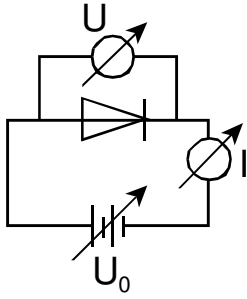
3.1 Leitertypen

Charakterisierung durch I/U-Kennlinien

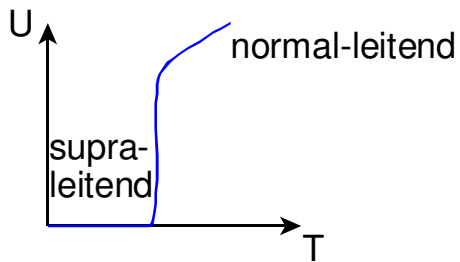
3.1.1 Metalle, Ohm'sche Leiter



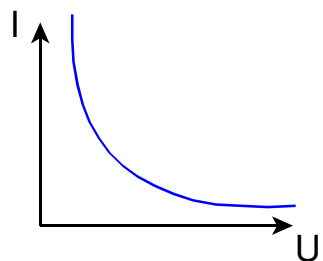
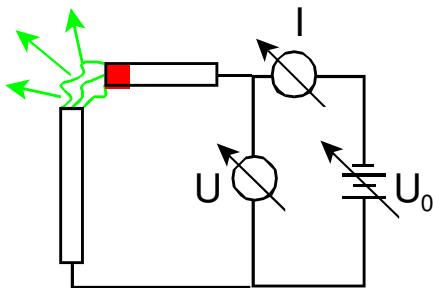
3.1.2 Halbleiterdiode



3.1.3 Supraleiter

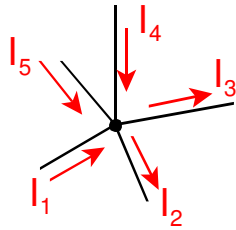


3.1.4 Lichtbogen



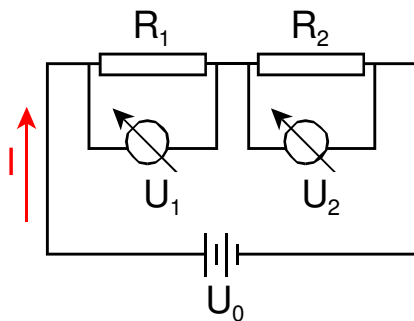
4. Gleichstromkreise – kirchhoff'sche Regeln

4.1 Knotenregel



$$\sum_k I_k = 0$$

4.2 Maschenregel

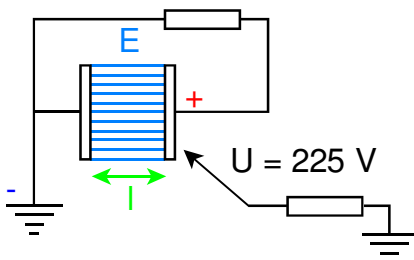


$$\sum_i U_i = \sum_k I_k \cdot R_k$$

5. Das elektrische Feld

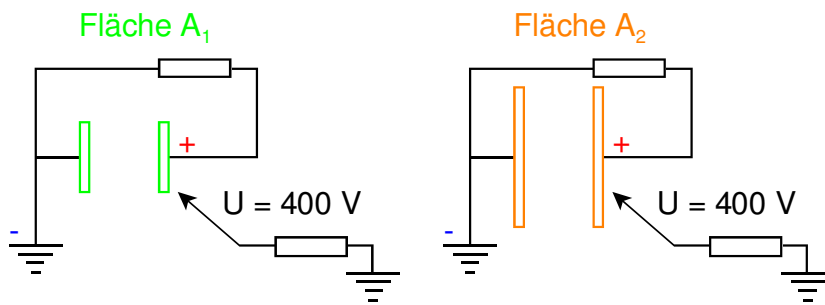
5.1 ...

Kondensatorplatten:



$$E = \frac{U}{l} = \text{const.}$$

Kondensatorfläche verdoppeln:



$$E = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{Q_2}{A_2}$$

5.1.x Zusammenfassung

Definition der Feldgrößen

Elektrische Feldstärke:

$$E = \frac{U}{l} \quad \vec{E} = \frac{U}{l} \cdot \vec{l}_e \quad [E] = 1 \frac{V}{m}$$

mit \vec{l}_e : Einheitsvektor

Ausgehend von der Flächenladungsdichte:

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

→ Verschiebungsdichte:

$$D = \frac{Q}{A} \quad \vec{D} = \frac{Q}{A} \cdot \vec{l}_e \quad [D] = 1 \frac{C}{m^2}$$

Zusammenhang:

$$D \sim E$$

$$D = \epsilon_0 \cdot E$$

mit ϵ_0 : Dielektrizitätskonstante (mit $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ A} \cdot \text{s}/(\text{V} \cdot \text{m})$)

Berechnung von ϵ_0

gemessen:

$$U = 225 \text{ V}$$

$$l = 0,01 \text{ m}$$

$$A = 0,1 \text{ m}^2$$

$$Q = 2,05 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

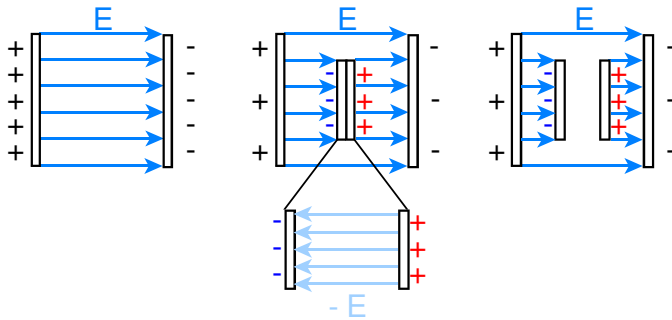
$$E = \frac{U}{l} = 2,25 \cdot 10^4 \frac{V}{m}$$

$$D = \frac{Q}{A} = \frac{2,05 \cdot 10^{-8} \text{ C}}{0,1 \text{ m}^2} = 2,05 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

$$\epsilon_0 = \frac{D}{E} = \frac{2,05 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}}{2,25 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}} = 9,11 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$$

5.2 Influenz

Beeinflussung der Ladungsverteilung:

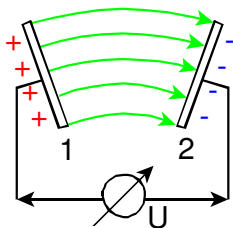


5.3 Das inhomogene elektrische Feld

Feld ausmessen!

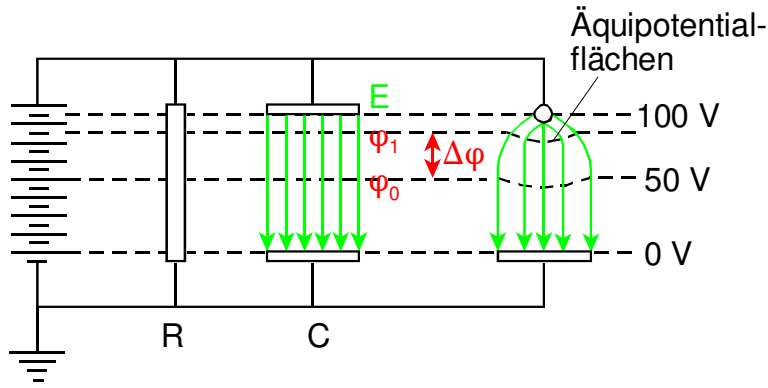
generell:

$$U = \int_1^2 E \cdot ds$$



5.4 Das elektrostatische Potential

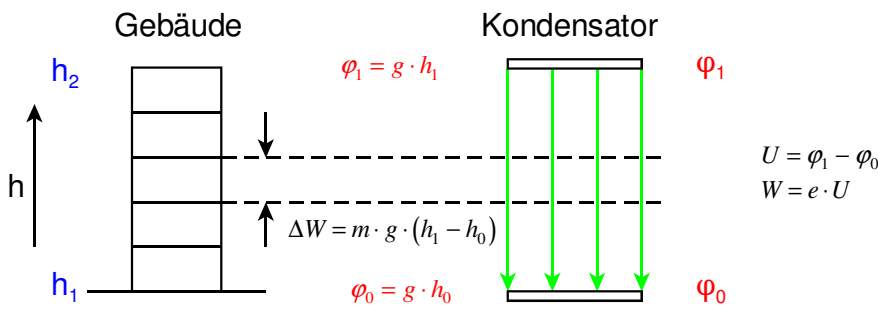
Potential ϕ (entspricht der potentiellen Energie in der Mechanik).



5.4.1 Definition

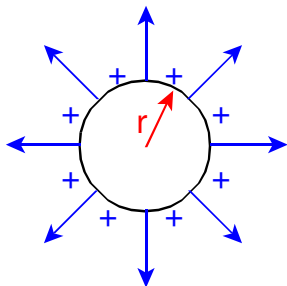
$$U = \varphi_1 - \varphi_0 = - \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad [U] = 1V$$

5.4.2 Analogie zur Mechanik



5.4.3 Potential einer geladenen Kugel (Coulombpotential)

Ladung $Q = 8,4 \cdot 10^{-8} C$



Fächenladungsdichte $\sigma = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = D(r)$

Elektrische Feldstärke:

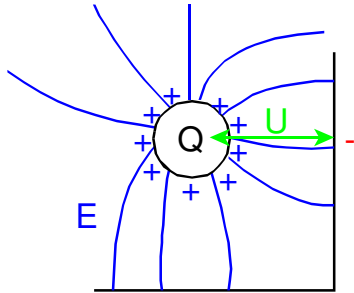
$$E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot D(r) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{F}_C \sim \frac{1}{r^2}$$

mit F_C : Coulombkraft

5.5 Kondensator

Kondensator ist ein Ladungsspeicher



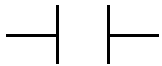
Aufnahmefähigkeit der Kugel für Ladungen ist begrenzt.

Kapazität:

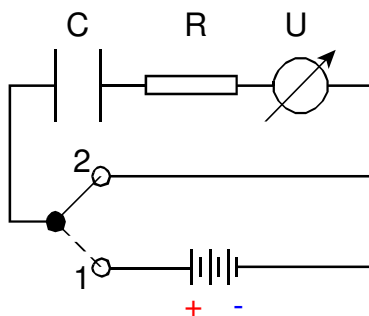
$$C = \frac{Q}{U} \quad [C] = 1F = 1\frac{C}{V}$$

mit F: Farad

Schaltensymbol:



5.5.1 Laden/Entladen eines Kondensators

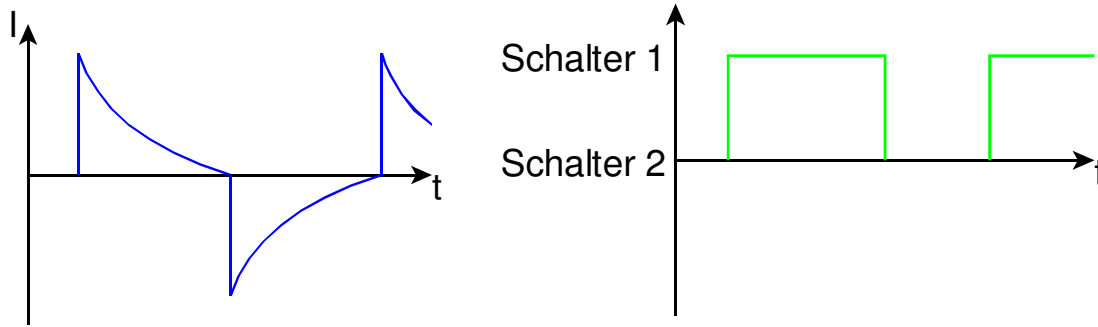


1: Aufladen
2: Entladen

Ladestrom:

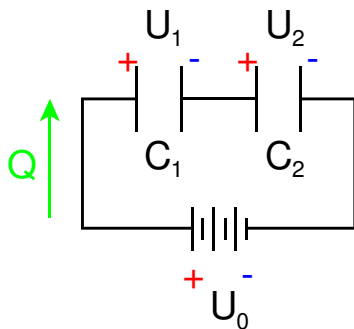
$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

mit $R \cdot C$: Zeitkonstante ($= \tau$); C: Kapazität; R: Widerstand



5.5.2 Kondensatorschaltungen

Serienschaltung

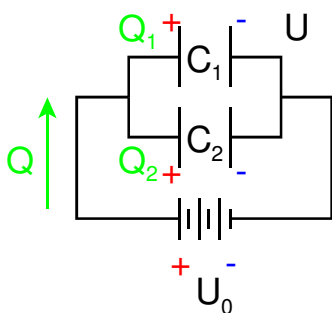


$$U_0 = U_1 + U_2$$

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Parallelschaltung



$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$C \cdot U_0 = C_1 \cdot U_0 + C_2 \cdot U_0$$

$$C = C_1 + C_2$$

5.5.3 Kugelkondensator

$$E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r_2^2}$$

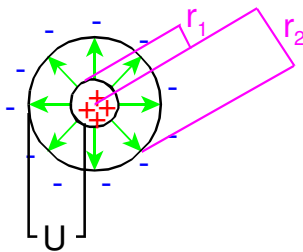
$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$$

$$U = \Delta \varphi = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$C = \frac{Q}{U} = 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1}$$

Hinweis:

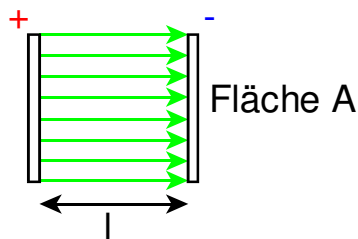
- wenn $r_2 \rightarrow \infty$: $C = 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_1$
- innere Kugel ist im Inneren feldfrei



5.5.4 Plattenkondensator

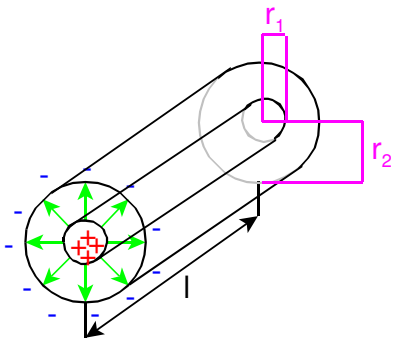
$$E = \frac{U}{l} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{D}{\epsilon_0}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{l}$$

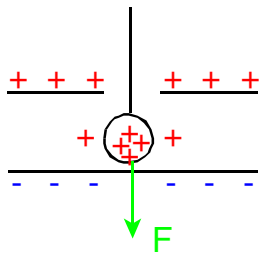


5.5.5 Zylinderkondensator

$$C = \frac{Q}{U} = 2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{l}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$



5.6 Kräfte und Drehmomente im elektrischen Feld



Kraft auf Ladung:

$$F \sim Q \quad E_0 = \frac{U}{l}$$

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}_0$$

$$\vec{E}_0 = \frac{\vec{F}}{Q} \quad [\vec{E}_0] = 1 \frac{N}{C} = 1 \frac{V}{m}$$

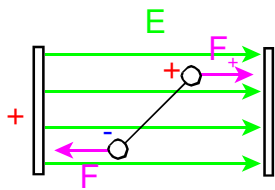
5.6.1 Kräfte zwischen Ladungen

Coulomb-Kraft:

$$F = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \vec{r}$$

5.6.2 Dipol im homogenen elektrischen Feld

$$F = F_+ + F_- = Q \cdot E_0 + (-Q) \cdot E_0 = 0 \rightarrow \text{keine resultierende Kraft}$$



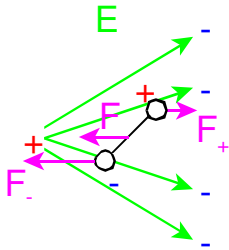
Dipolmoment:

$$M = F \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin \alpha + F \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin \alpha = 2 \cdot Q \cdot E_0 \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin \alpha$$

$$|\vec{M}| = |\vec{p}| \cdot E_0 \cdot \sin \alpha \quad \vec{p} = Q \cdot \vec{l}$$

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}_0$$

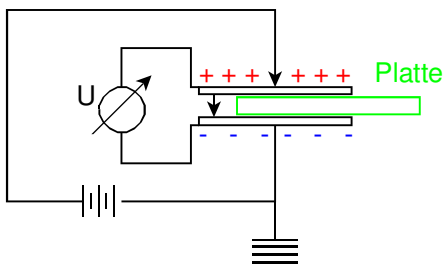
5.6.3 Dipol im inhomogenen elektrischen Feld



→ Dipol wird in die Feldquelle gezogen

5.7 Materie im elektrischen Feld

Pertinaxplatte in den Kondensator:



→ Ergebnis: Spannung sinkt

$$U_m = \frac{U_0}{\epsilon}$$

Auswertung:

$$E_m = \frac{U_m}{l} = \frac{U_0}{\epsilon \cdot l} = \frac{E_0}{\epsilon}$$

$$E_m = \frac{E_0}{\epsilon}$$

→ elektrisches Feld

$$Q_m = Q_0$$

→ Ladung

$$\sigma_m = \sigma_0$$

→ Flächenladungsdichte

$$D_m = D_0$$

→ Verschiebungsdichte

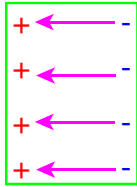
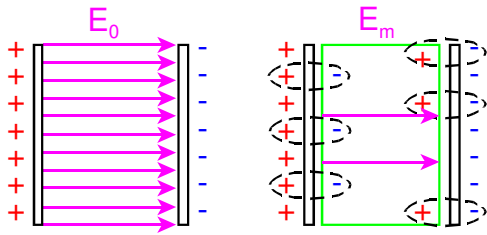
$$C_m = \frac{Q_m}{U_m} = \epsilon \cdot \frac{Q_0}{U_0} = \epsilon \cdot C_0$$

→ Kapazität mit Dielektrikum

$$D_m = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot E_m$$

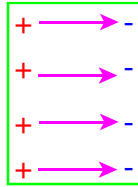
→ Folge: Bei konstanter Spannung mehr Ladung.

5.7.1 Anschauliche Deutung



Polarisationsfeld

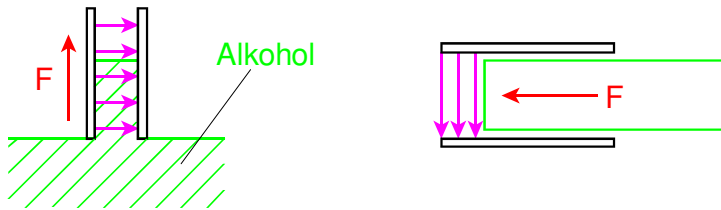
$$p = \sigma_p = \frac{\text{Dipolmoment}}{\text{Volumen}}$$



Depolarisationsfeld

$$\vec{E}_{dep} = -\frac{\vec{p}}{\epsilon_0}$$

5.7.2 Kraft auf Dielektrikum senkrecht zum elektrischen Feld

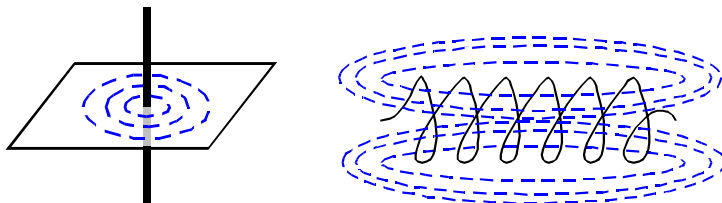


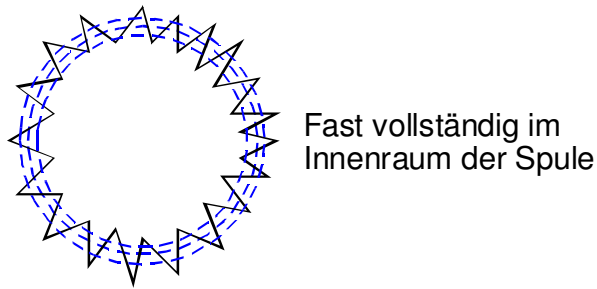
5.8 Magnetische Felder

Kleinster Magnet? Rotierende Ladung → magnetischer Dipol (keine Monopole)

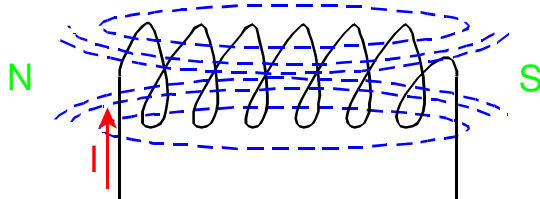
Ursache für Magnetismus: bewegte elektrische Ladungen

5.8.1 Makroskopisch





Anwendung: z.B. Magnetspule



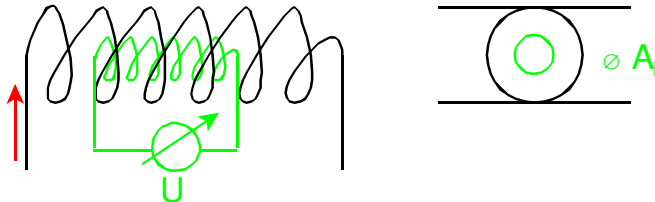
Feldstärke H im Vakuum:

$$H = I \cdot \frac{n}{l} \quad [H] = 1 \frac{A}{m}$$

mit H: Magnetfeldstärke; I: Strom; n: Zahl der Windungen; l: Länge der Spule

→ homogenes Magnetfeld in langer Spule

5.8.2 Magnetfeld beeinflusst Ladungsbewegung: Induktion

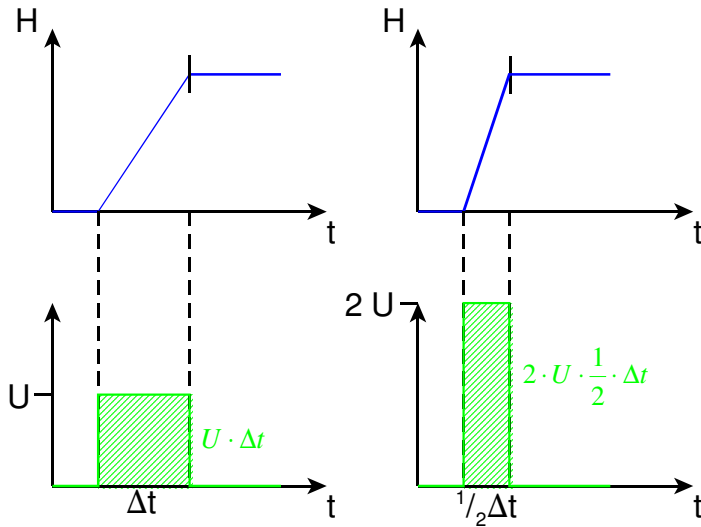


Induktion: Magnetfeldänderung bewirkt im Draht/Spule Spannungsstoß.

$$\int U_{ind} \cdot dt = \mu_0 \cdot n \cdot A \cdot \Delta H$$

Drei mögliche Feldänderungen

1.) Durch Änderung des Spulenstroms

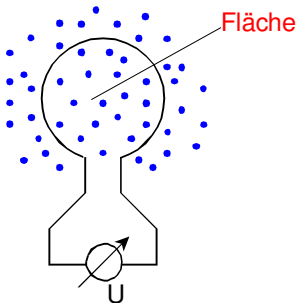


2.) Richtungsänderung der Induktionsspule



3.) Änderung der Querschnittsfläche der Induktionsspule

Einfache Induktionsspule



$$\int U_{ind} \cdot dt = \mu_0 \cdot A \cdot \Delta H$$

$$U_{ind} = \frac{d}{dt} \underbrace{(\mu_0 \cdot A \cdot \Delta H)}_{\phi}$$

mit ϕ : Magnetischer Fluss ($[\phi] = 1Wb = 1 \frac{Tesla}{m^2}$)

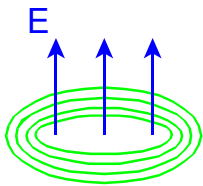
Induktionsgesetz:

$$U_{ind} = \dot{\phi}$$

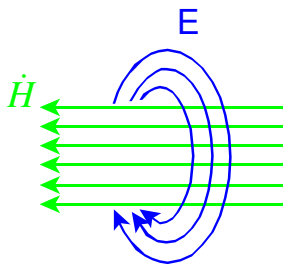
Rogowski-Spule: Messung des Stromes, das ein Magnetfeld erzeugt.

5.8.3 Zusammenfassung

Ein sich änderndes elektrisches Feld (Strom) erzeugt ein senkrechtetes Magnetfeld:



Ein sich änderndes Magnetfeld erzeugt senkrecht dazu ein ringförmiges elektrisches Feld:



Ergebnis: Erste Maxwell'sche Gleichung

- Durchflutungsgesetz

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} + \frac{d}{dt} \cdot \int \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

mit J: Stromdichte; A: Fläche; D: Quellenfeld; s: Weg

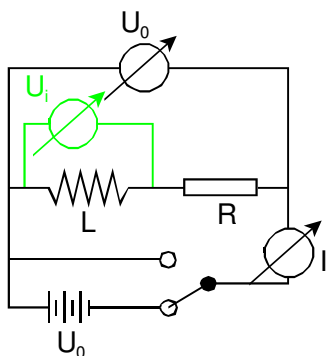
Zweite Maxwell'sche Gleichung

- Induktionsgesetz

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad \vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}$$

5.8.4 Anwendungen

Selbstinduktion



$$U_i = \mu_0 \cdot n \cdot A \cdot \dot{H}$$

mit $\dot{H} = \frac{I \cdot n}{l}$

$$U_i = \underbrace{\mu_0 \cdot \frac{n^2 \cdot A}{l}}_L \cdot \dot{I}$$

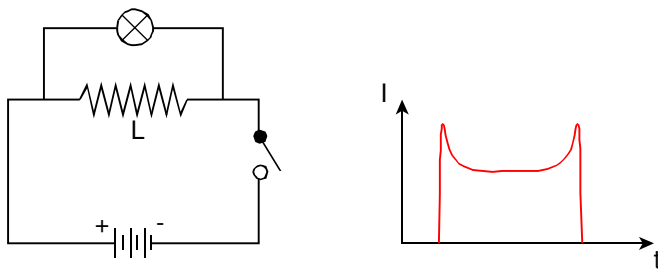
→ Induktivität L:

$$L = \mu_0 \cdot \frac{n^2 \cdot A}{l} \quad [L] = 1 \frac{Vs}{A} = 1H$$

mit H: Henry

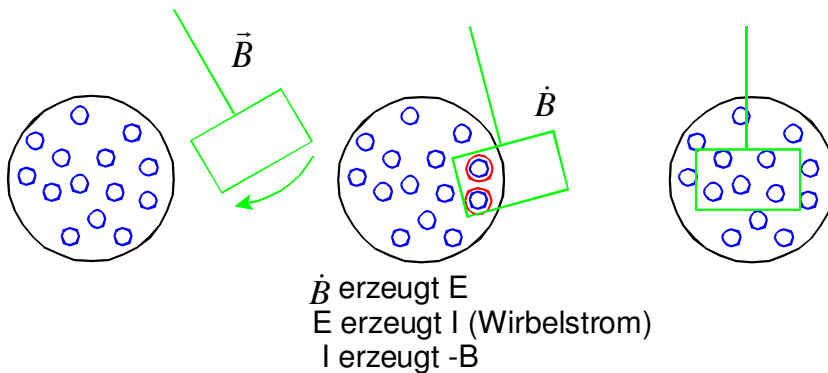
$$U_i = L \cdot \dot{I}$$

Lämpchen heller beim Einschalten



Wirbelströme in leitendem Material

1.) Waltenhof'scher Hammer



2.) Metallscheiben

- Vollscheibe
- geschlitzte Scheiben

3.) „Säge“

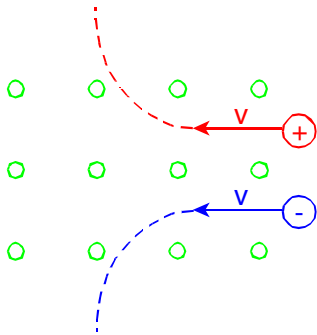
5.9 Kräfte auf Ladung

Lorentzkraft:

$$\vec{F}_L = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

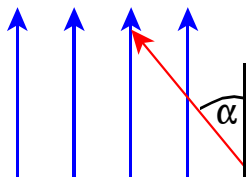
$$\vec{B} = \frac{\vec{H}}{\mu_0}$$

5.9.1 Einzelladung



„Rechte-Hand-Regel“

$$F = Q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha$$



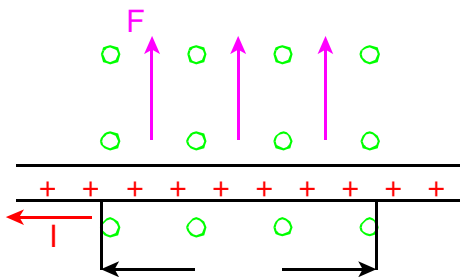
Festlegung:

$$B = \frac{F}{Q \cdot v \cdot \sin \alpha} \quad [B] = 1 \frac{N}{C \cdot m/s} = 1 \frac{N}{A \cdot m} = 1 \text{Tesla}$$

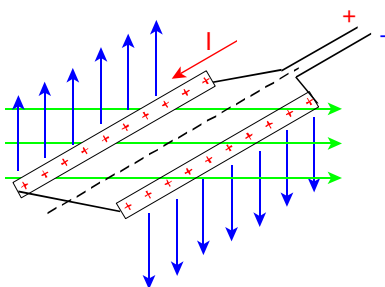
5.9.2 Strom (viele bewegte Ladungen im Draht)

$$\vec{F} = -e \cdot n \cdot l \cdot A \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

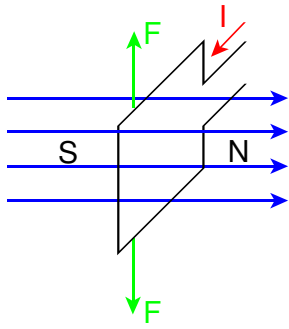


Zwei Drähte:

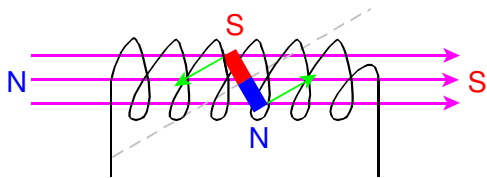


→ Schleife senkrecht zu \vec{B}

5.10 Magnetischer Dipol und Halleffekt



Magnetischer Dipol im homogenen Feld:

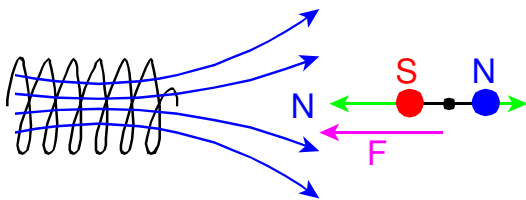


→ Dipolmoment:

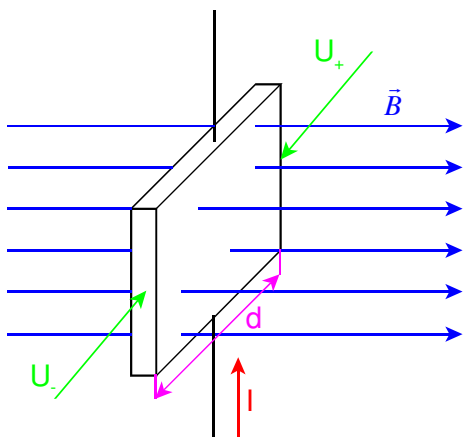
$$\vec{M}_{dip} = \vec{m} \times \vec{B}$$

mit \vec{m} : magnetischer Dipol

Magnetischer Dipol im inhomogenen Feld:



5.10.1 Halleffekt



$$U_{ind} = A_H \cdot \frac{I \cdot B}{d}$$

mit A_H : Hallkonstante (materialabhängig)

→ A_H klein für Metalle und groß für Halbleiter

5.10.2 Lenz'sche Regel

Der induzierte Strom ist so gerichtet, dass er seiner Entstehungsursache entgegenwirkt.