

Protokoll zu Versuch 020a

Brechungsindexbestimmung mit dem Prismen-Spektrolapparat

Verfasser: Felix Jörg Welwi Diplom
Mitarbeiter: Christian Nickenmeier Welw. Dipl.
Gruppen Nr.: 4-008
Datum: 29.05.08
Betreuer: Alexander Meyer

1.) Aufgabenstellung

Mit einem Prismenspektrometer soll der Winkel minimaler Ablenkung für alle Hg-Linien in einem Prisma bekannt werden. Daraus sollen die Brechungsindizes der einzelnen Wellenlängen sowie das Auflösungsvermögen des Prismas bestimmt werden.

2.) Fragen

1.) Erklären Sie das Snellius - Brechungsgesetz.

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2} = n_{2,1}$$

Die Brechung einer Welle an einer Grenzfläche erfolgt im Verhältnis ihrer Ausbreitungsgeschwindigkeiten.

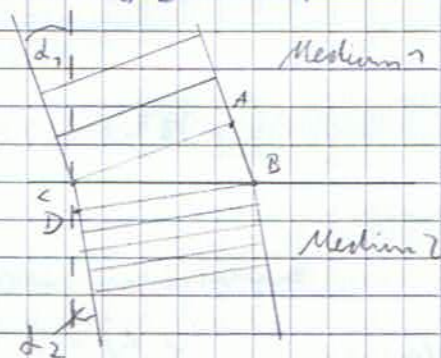


Abb. 1

In Abb. 1 wird deutlich: Die Welle muss im Medium 1

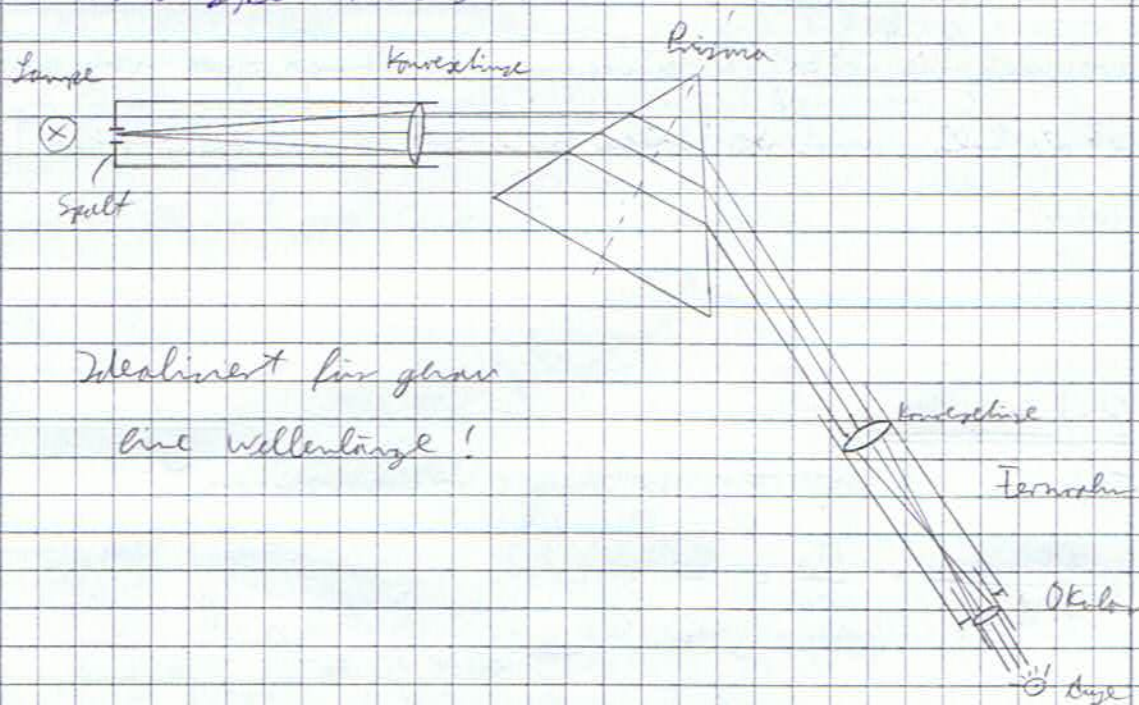
Die Breche AB in der selben Zeit zurück legen, wie im Medium 2. Daher ist $c_1 > c_2$.

über $c_1 = \frac{c_0}{n_1}$ bzw. $c_2 = \frac{c_0}{n_2}$ ergibt sich: $\frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$

2.) Was versteht man unter Dispersion?

Dispersion in der Optik ist die Abhängigkeit des Brechungsindex n von der Wellenlänge λ . Bei „normaler“ Dispersion nimmt die Brechzahl mit kleineren Wellenlängen zu, bei „anomaler“ Dispersion ist es umgekehrt.

3.) Zeichnen sie den Strahlengang in einem Prismenspektrometer.



4.) Was versteht man unter spektralem Auflösungsvermögen? Wovon hängt es beim Prisma ab?

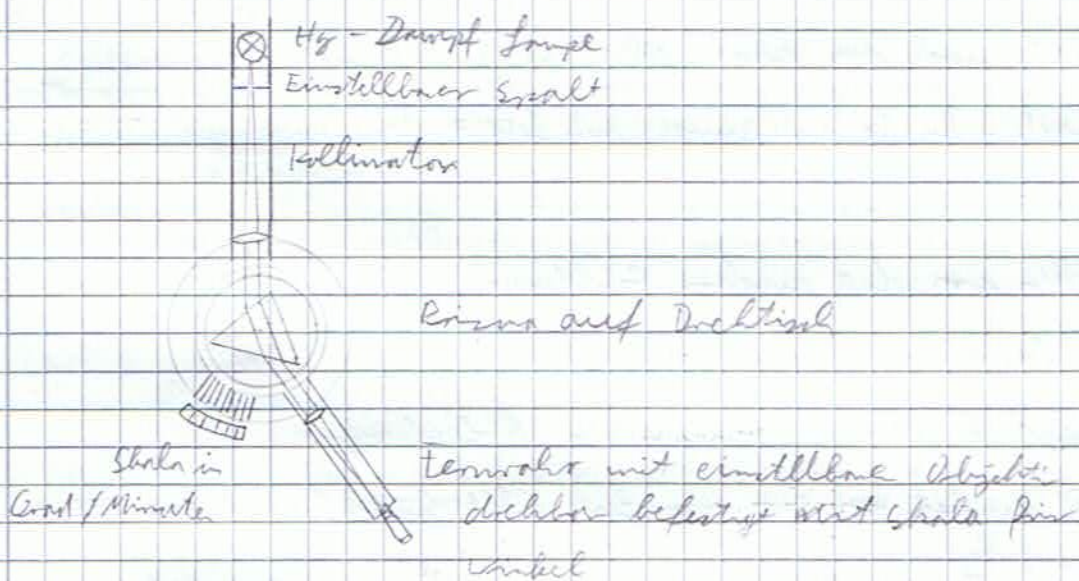
Je größer das Auflösungsvermögen, desto

Besser werden die einzelnen Linien des Spektrums voneinander getrennt. Beim Prisma hängt es von der Größe des Prismas, also von der Größe der brechenden Flächen und vom Brechungswinkel ab.
Basis

$$A_p = b \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

3.) Messprinzip mit Skizze und Versuchsaufbau

Versuchsaufbau von oben:



Vorbereitung:

Zunächst wurde das Fernrohr fixiert und der Spalt eingestellt und ohne Prisma ein möglichst schmales und schärferes Spektrum eingestellt. Nach dem Schaufstellen wurde die Skala auf den Wert 0 eingestellt, während der Spalt mit genau auf den Nullkreuz, das im Okular eingraviert war, stand.

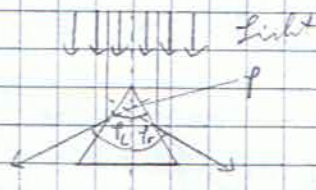
Bestimmung des Brechungsindex:

Das Prisma wurde nun so auf den Prismenstisch

gestellt, dass die Beobachter heute genau in der Mitte des Trichters befindet.

φ_c sowie φ_r wurden mit dem Feusscher bestimmt

und φ der gemittelte Wert berechnet.



Winkel φ
über
Totalreflexion

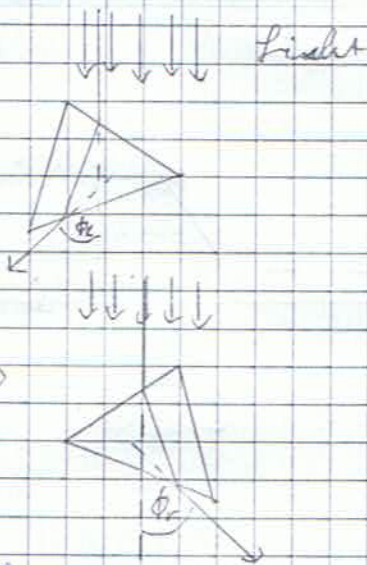
Winkel der minimalen Ablenkung:

Das Prisma wurde nun in die Mitte des Trichters gestellt, so dass eine Fläche (I)

des Prismas zum Kolimator zeigte und das Licht gebrochen wurde.

Das Prisma wurde nun leicht bewegt, bis das Spektrum sich wieder in die andere Richtung zu bewegen begann → Umkehrpunkt = Winkel minimaler Ablenkung.

Die Winkel wurden nun für alle Spektrallinien bestimmt und das Prisma gedreht, so dass die Winkel nach aus der anderen Richtung bestimmt werden konnten.



4. Formeln:

Bestimmung von φ : (I)
$$\varphi = \frac{360^\circ - \varphi_r + \varphi_c}{2}$$
 φ = Brechwinkel d. Prismas

(II)
$$\sin \frac{\delta + \varphi}{2} = n \sin \frac{\varphi}{2}$$
 φ : Brechwinkel
 δ : Winkel min. Ablenkung
 n : Brechungsindex

(III)
$$\phi = \frac{360^\circ - \delta_c - \delta_r}{2}$$
 δ = Winkel min. Ablenkung

(IV)
$$A_p = b \left| \frac{n-1}{n \cdot \lambda} \right|$$
 A_p : Auflösungsvermögen Prisma
 b : Prismenbreite
 n : Brechzahl
 λ : Wellenlänge

5. Messwerte

$b = 4,0 \text{ cm}$

Best. φ für Prisma 1

$$\varphi = \frac{360^\circ - \varphi_r + \varphi_l}{2}$$

$$\varphi_r = 322,5^\circ \quad 320^\circ 32'$$

$$\varphi_l = 62,5^\circ \quad 30^\circ 75'$$

Minimalelenkung

Spektrallinie	φ_l	φ_r
rot	$38^\circ 35'$	$320^\circ 55'$
gelb	$38^\circ 42'$	$320^\circ 45'$
hellgrün	$38^\circ 50'$	$320^\circ 38'$
türkisgrün	$39^\circ 10'$	$320^\circ 16'$
blau	$39^\circ 35'$	$319^\circ 47'$
violett	$39^\circ 57'$	$319^\circ 25'$

Best. φ für Prisma 2 $b = 4,0 \text{ cm}$

$$\varphi_r = 371^\circ 49'$$

$$\varphi_l = 71^\circ 11'$$

Spektrallinie	φ_l	φ_r
rot	$47^\circ 55'$	$371^\circ 39' \quad 312^\circ 10'$
gelb	$48^\circ 16'$	$371^\circ 49'$
hellgrün	$48^\circ 37'$	$371^\circ 31'$
türkis	$49^\circ 16'$	$370^\circ 45'$
blau	$50^\circ 23'$	$369^\circ 38'$
violett	$51^\circ 45'$	$368^\circ 48'$

Handwritten signature

6.) Auswertung

a) Brechungsindizes

Prism I:

Brechender Winkel: $\varphi = \frac{360^\circ - 320^\circ 32' + 80^\circ 15'}{2} =$
(nach Gl. I)

$$\underline{\underline{\varphi = 59^\circ 52''}}$$

Nach Gl. II: $\sin\left(\frac{\delta + \varphi}{2}\right) = n \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\delta + \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

Strahlfarbe	δ_e	δ_r	$\delta = \frac{360^\circ \delta_r - \delta_e}{2}$
rot	$38^\circ 55'$	$320^\circ 55'$	$39^\circ 0'$
gelb	$38^\circ 42'$	$320^\circ 45'$	$38^\circ 59'$
hellgrün	$38^\circ 50'$	$320^\circ 34'$	$39^\circ 8'$
türkisgrün	$39^\circ 10'$	$320^\circ 16'$	$39^\circ 27'$
blau	$39^\circ 35'$	$319^\circ 47'$	$39^\circ 54'$
violett	$39^\circ 57'$	$319^\circ 25'$	$40^\circ 13'$

$$\underline{\underline{n_{\text{rot}} = \frac{\sin\left(\frac{39^\circ 0' + 59^\circ 52'}{2}\right)}{\sin\left(\frac{59^\circ 52'}{2}\right)} \approx 1,522}}$$

$$\underline{\underline{n_{\text{gelb}} \approx 1,522}}$$

$$\underline{\underline{n_{\text{hellgrün}} \approx 1,524}}$$

$$\underline{\underline{n_{\text{türkis}} \approx 1,527}}$$

$$\underline{\underline{n_{\text{blau}} \approx 1,533}}$$

$$\underline{\underline{n_{\text{violett}} \approx 1,536}}$$

Prisma II

Brechender Winkel: $\underline{\underline{\varphi = \frac{360^\circ - 311^\circ 49' + 71^\circ 10'}{2} \approx 59^\circ 45'}}$
(nach Gl I)

Spektrallinie	δ_2	δ_1	$\delta = \frac{360^\circ - \delta_1 + \delta_2}{2}$	$n = \frac{\sin(\frac{\delta + \varphi}{2})}{\sin(\varphi/2)}$
rot	$47^\circ 55'$	$312^\circ 10'$	$47^\circ 53'$	1,620
gelb	$48^\circ 16'$	$311^\circ 49'$	$48^\circ 14'$	1,624
hellgrün	$48^\circ 37'$	$311^\circ 31'$	$48^\circ 33'$	1,627
türkis	$49^\circ 16'$	$310^\circ 45'$	$49^\circ 16'$	1,635
blau	$50^\circ 23'$	$309^\circ 38'$	$50^\circ 22'$	1,646
violett	$51^\circ 15'$	$308^\circ 48'$	$51^\circ 14'$	1,654

b) Auftragung von n über λ , Wellenlängenverläufe

Linse I: 404,7 nm (violett):

$$\left| \frac{dn}{d\lambda} \right| \approx \left| \frac{\Delta n}{\Delta \lambda} \right| \approx \frac{1,5364 - 1,5300}{440 \text{ nm} - 450 \text{ nm}} \approx$$

$$\approx 7,28 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{nm}} = \underline{\underline{7,28 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{m}}}}$$

Nach Gl $A_{p,\eta} = b \cdot \left| \frac{dn}{d\lambda} \right| = 4 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot (+7,28 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{m}})$

$$\underline{\underline{A_{p,\eta} \approx +5,12 \cdot 10^3}} \quad \text{für } 404,7 \text{ nm}$$

Linse I: 623,4 nm (rot):

$$\left| \frac{dn}{d\lambda} \right| \approx \left| \frac{\Delta n}{\Delta \lambda} \right| \approx \frac{1,5220 - 1,5274}{580 \cdot 10^{-9} \text{ m} - 710 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \approx \underline{\underline{+4,675 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{m}}}}$$

$$\underline{\underline{A_{p,\eta} (623,4 \text{ nm}) \approx 4 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot (+4,675 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{m}})}}$$

$$\underline{\underline{\approx +1,846 \cdot 10^2}}$$

Brechungsindex n über Wellenlänge λ

1,660

Brechungsindex n

theoretische Fehlerbalken

$\Delta\lambda \approx 18$

1,550
1,650

$\Delta n \approx -0,0725$

1,540
1,640

$\Delta\lambda \approx 50 \text{ nm}$

$\Delta n \approx 0,0069$

1,530
1,630

$\Delta n \approx 0,008$

1,6226

1,5224

$\Delta n \approx 0,0006$

$\Delta\lambda \approx 110$

1,520
1,620

violett

blau

türkis

hellgrün

gelb

rot

Wellenlänge λ [nm]

papersnap



Linse II bei 404,7 nm (~~rot~~) violett

$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{\Delta n}{\Delta \lambda} \approx \frac{1,6412 - 1,654}{(420 - 404,7) \cdot 10^{-9} \text{ m}} \approx -7,11 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{m}}$$

$$\underline{\underline{A_{p,2}(404,7 \text{ nm}) = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \left(+7,11 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{m}} \right)}}$$

$$\underline{\underline{\approx +2,844 \cdot 10^4}}$$

bei 623,4 nm (~~rot~~)

$$\frac{dn}{d\lambda} \approx \frac{1,620 - 1,628}{(624 - 620) \cdot 10^{-9} \text{ m}} \approx -7,02 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{m}}$$

$$\underline{\underline{A_{p,2}(623,4 \text{ nm}) \approx 4 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \left(+7,02 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{m}} \right)}}$$

$$\underline{\underline{\approx +2,8070 \cdot 10^3}}$$

7.) Fehlerrechnung

Abschätzen des Ablesefehlers:

Gemessen wurden:

Spektrallinie	δ_z	δ_z (mit Skala)	δ_z (reine)	$\Delta \delta$
rot	47° 55'	372° 10'	47° 55'	5'
gelb	48° 16'	377° 40'	48° 11'	5'
hellgrün	48° 32'	377° 31'	48° 29'	3'
türkis	49° 10'	370° 45'	49° 13'	3'
blau	50° 23'	360° 38'	50° 22'	1'
violett	51° 15'	308° 48'	51° 12'	3'

Die maximale „Ablesedifferenz“ beträgt 8'. Damit lässt sich für die Ablesegenauigkeit ein Wert von 10' abschätzen.

Der geschätzte Mittelwert aus 2 abgelesenen Werten gebildet wird, ist $\Delta \delta = 2 \cdot 10' = 20' \hat{=} 0,0058 \text{ (rad)}$

Analog wird der Fehler für φ auf $\Delta \varphi = 20'$ geschätzt (also $0,0058 \text{ (rad)}$)

Brechungsindex: (für Prisma II; 625,4 nm (rot))

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\delta + \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\Delta n = \left| \frac{\partial n}{\partial \delta} \right| \cdot \Delta \delta + \left| \frac{\partial n}{\partial \varphi} \right| \cdot \Delta \varphi$$

$$= \left| \frac{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\delta + \varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\left(\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2} \right| \cdot \Delta \delta$$

$$+ \left| \frac{\cos\left(\frac{\delta + \varphi}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\delta + \varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}}{\left(\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2} \right| \cdot \Delta \varphi$$

$$\Delta n = \left| \frac{\cos\left(\frac{\delta + \varphi}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right| \cdot \Delta \delta + \left| \frac{\cos\left(\frac{\delta + \varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\delta + \varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{2 \left(\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2} \right| \cdot \Delta \varphi$$

$$\frac{\delta + \varphi}{2} = \frac{47^\circ 53' + 50^\circ 45'}{2} = 53^\circ 49' \hat{=} 53,816^\circ$$

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{47^\circ 53'}{2} \hat{=} 23,942^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta n = \left| \frac{\cos(53,816^\circ)}{2 \sin(23,942^\circ)} \right| \cdot \Delta \delta + \left| \frac{\cos(53,816^\circ) \cdot \sin(23,942^\circ) - \sin(53,816^\circ) \cdot \cos(23,942^\circ)}{2 \left(\sin(23,942^\circ)\right)^2} \right| \cdot \Delta \varphi$$

$$\underline{\Delta n \hat{=} 0,7274 \cdot 0,0058 + 7,572 \cdot 0,0058 \hat{=} 0,013}$$

Diesen Wert / den Fehlerbalken in das Diagramm eintragen um graphisch die Steigung $\frac{dn}{d\lambda}$ zu bestimmen würde zu keinem sinnvollen Ergebnis führen, da die Steigung sogar deutlich positiv werden würde.

→ Der Fehler für das Auflösungsvermögen ist also extrem groß!

8. Zusammenfassung:

Für Prisma I wurden bestimmt:

$$\text{Brechender Winkel } \varphi = 59^{\circ} 52' \pm 20'$$

Für die einzelnen Spektrallinien:

	Winkel min. Ablenkung δ	Brechungsindex
rot	$39^{\circ} 00' \pm 20'$	1,522
gelb	$38^{\circ} 59' \pm 20'$	1,522
hellgrün	$39^{\circ} 08' \pm 20'$	1,524
türkis	$39^{\circ} 17' \pm 20'$	1,527
blau	$39^{\circ} 54' \pm 20'$	1,533
violett	$40^{\circ} 13' \pm 20'$	1,536

$$\text{Auflösungsvermögen für } 404,7 \text{ nm: } A_p \approx -5,72 \cdot 10^3$$

$$\text{Auflösungsvermögen für } 627,4 \text{ nm: } A_p \approx -7,846 \cdot 10^2$$

Für Prisma II wurden bestimmt:

$$\text{Brechender Winkel } \varphi = 59^{\circ} 45' \pm 20'$$

für die einzelnen Spektrallinien:

	Winkel min. Ablenkung δ	Brechungsindex n
rot	$47^{\circ} 53' \pm 20'$	$1,620 \pm 0,013$
gelb	$48^{\circ} 14' \pm 20'$	$1,624$
hellgrün	$48^{\circ} 33' \pm 20'$	$1,627$
türkis	$50^{\circ} 16' \pm 20'$	$1,635$
blau	$50^{\circ} 22' \pm 20'$	$1,646$
violett	$51^{\circ} 14' \pm 20'$	$1,654$

Auflösungsvermögen: $A_{p,2} (404,7 \text{ nm}) \approx +2,84 \cdot 10^2$

$A_{p,2} (623,4 \text{ nm}) \approx +2,87 \cdot 10^3$

Aufgrund der großen Streuung war für die Berechnung des Fehlers des Auflösungsvermögens leider nicht möglich. In sofern sind diese Werte dann auch sehr ungenau!

Mögliche Ursachen sind Ableserfehler, ungenaue Messinstrumente bzw. Die Position des Prismas auf dem Drehteller (wenn es sich nicht exakt in der Mitte befindet).

Gut!

5.6.2008

A. M.