Lösungen zu den Präsenzübungen Blatt 9

Aufgabe P29

a.) Bestimmung der Orthonormalbasis:

$$f_1 = \frac{1}{3} \cdot v_1$$

$$\widetilde{f_2} = v_2 - \langle v_2, f_1 \rangle \cdot f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{f_3} = v_3 - \langle v_3, f_2 \rangle \cdot f_2 - \langle v_3, f_1 \rangle \cdot f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f_3 = \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{f_4} = f_4 = v_4 - \langle v_4, f_3 \rangle \cdot f_3 - \langle v_4, f_2 \rangle \cdot f_2 - \langle v_4, f_1 \rangle \cdot f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b.) Die Beiden Systeme sind gleich, da beides Basen aus vier linear unabhängigen Vektoren bestehen, und somit den vierdimensionalen Raum aufspannen.

c.) Eine Matrix ist orthogonal wenn gilt:

$$A^T \cdot A = E_n$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{18}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A ist orthogonal.

Aufgabe P30

a.) Die Abbildungen stellen eine Bewegung dar, wenn sich durch die Abbildung die Länge eines Vektors nicht ändert. Dies Gilt, wenn die Drehmatrix orthogonal ist.

Für die Matrix A gilt: $A \cdot A^T = E_n$ damit ist sie orthogonal und alle 3 Abbildungen α, β und γ stellen eine Bewegung dar. Da gilt:

$$\det(A) = 1$$

stellt die Bewegung eine *eigentliche Bewegung* dar.

b.) Für einen Punkt, welcher auf der Drehachse liegt, muss gelten:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

da sich seine Koordinaten bei der Drehung nicht ändern. Durch nachrechnen ergibt sich:

$$\vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; \lambda \in \mathbb{R}$$

Ein welcher sich durch die Drehmatrix genau um den Drehwinkel der Matrix dreht muss senkrecht auf der Drehachse stehen. Ein einfacher solcher Vektor wäre:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt durch ausführen der Abbildung:

$$A \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit ist der Drehwinkel:

$$\cos\phi = \frac{\langle \vec{u}, A \cdot \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|A \cdot \vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{3}$$

c.) Wenn es sich auch bei β und γ auch um Drehungen halten soll, so muss es auch hier gelten:

$$A \cdot \vec{x} + \vec{s} = \vec{x} \;\; \text{bzw.} \;\; A \cdot \vec{x} + \vec{t} = \vec{x}$$

Für die Abbildung β gibt es eine solche Drehachse:

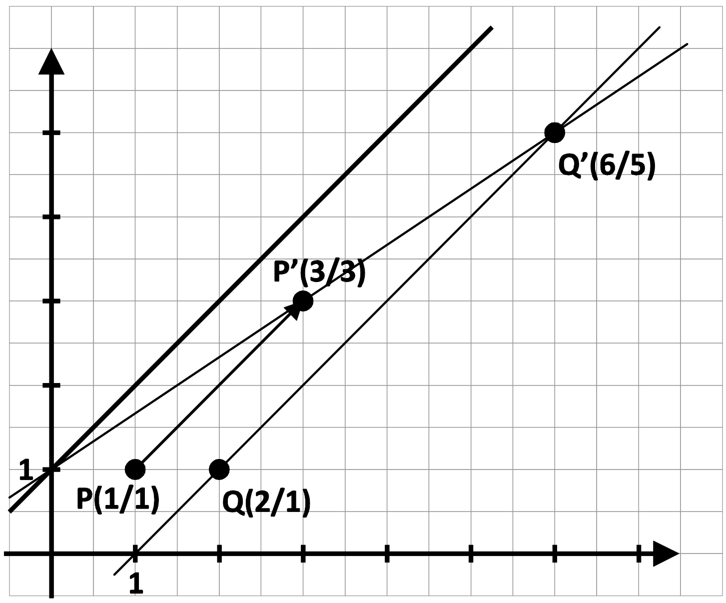
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Drehachse zeigt also in dieselbe Richtung die diejenige bei α, ist aber verschoben. Das liegt daran, dass der Vektor $\vec{s}$ orthogonal zur Drehachse von A ist.

Für die Abbildung γ findet man keine Drehachse. Dies lässt sich damit begründen, dass der Vektor $\vec{t}$ in Richtung der Drehachse zeigt und er somit eine Verschiebung des abgebildeten Vektors in Richtung der Drehachse bewirkt, was insgesamt eine *Schraubung* ergibt.

Aufgabe P31

a.) Die Geometrische Konstruktion dieser Scherung sieht folgendermaßen aus:



b.) Die Scherung lässt sich als lineare Abbildung folgendermaßen beschreiben:

$$A \cdot \vec{v} + \vec{b} = \vec{w}$$

Stellt man nun mit den Bedingungen der Aufgabenstellung diese Gleichung auf, so ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix}$$

Damit erhält man das LGS:

$$ax + bx + b + e = x$$

$$cx + dx + d + f = x + 1$$

Durch Koeffizienten-Vergleich zeigt sich:

$$a + b = 1 \quad b + e = 0$$

$$c + d = 1 \quad d + f = 1$$

Verwendet man weiterhin die Beziehung aus a.) $\alpha(P) = (3{,}3)$ für $P = (1{,}1)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

So erhält man die endgültige Abbildung welche die Scherung darstellt:

$$\alpha: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2: \vec{v} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$