

8. Zusammenfassung

Mit Hilfe des Bessel-Verfahrens wurde die Brennweite einer Bikonvexlinse bestimmt.

$$f_{\text{Bikonvex}} = 10,09 \text{ cm} \pm 0,24 \text{ cm}$$

Zur Bestimmung der Brennweite der Bikonkavlinse wurde ein Linsensystem dieser Linse mit der verwendeten Bikonvexlinse gebildet und nach Berechnung der Brennweite des Linsensystems auf die Brennweite der Bikonkavlinse geschlossen:

$$f_{\text{Bikonkav}} = -20,12 \text{ cm} \pm 1,22 \text{ cm}$$

$$f_{\text{Linsensystem}} = 20,24 \text{ cm} \pm 0,22 \text{ cm}$$

Die größere Abweichung für f_{Bikonkav} ist auf die Verwendung des Ergebnisses für die Bikonvexlinse und der Ungenauigkeit bei Ablesung der Messwerte im Verfahren zurückzuführen.

Zum Schluss wurde durch parallel einfallendes Licht auf eine dicke Linse, deren Hauptebenenabstand bestimmt.

$$h = 6,08 \text{ mm} \pm 0,13 \text{ mm}$$

Unter Berücksichtigung des Hauptebenenabstandes wurde schließlich auch die Brennweite der dicken Linse wiederum mit dem Bessel-Verfahren bestimmt.

$$f_{\text{dicke Linse}} = 12,35 \text{ cm} \pm 0,12 \text{ cm}$$

✓ Spitzbrennweitig!
29.05.08
Christl

0 10 Brennweite dicker Linsen

8.5.08

Verfasser: Christian Niedermeier (Dipl. Werkstoffwissenschaft)
Mitarbeiter: Felix Jörg (" ")
Gruppennummer: 4-008
Beheuer: Thomas Schwarzbach

1. Aufgabenstellung

Nach dem Bessel-Verfahren wird die Brennweite einer Bikonvexlinse gemessen und die Brennweite einer Bikonkavlinse mit Hilfe eines Linsensystems unter Verwendung einer Bikonvexlinse bestimmt. Zudem werden Hauptpunkte und Brennweite einer dicken Linse durch Autokollimation direkt bestimmt.

2. Fragen

2.1 Warum wird paralleles Licht nach Durchlaufen einer Bikonvexlinse fokussiert?

Durch Lichtbrechung an der Linse werden Parallelstrahlen nach Durchgang durch die Linse auf den Brennpunkt fokussiert. Strahlen die durch den Brennpunkt verlaufen gehen räumlich nach Brechung in Parallelstrahlen über und umgekehrt.

$$\frac{\sin \alpha}{s \cdot n} = \frac{n_2}{n_1}$$

2.2 Wie hängt die Brennweite einer Linse vom Krümmungsradius ihrer brechenden Kugelflächen und vom Brechungsindex ab?

→ Linsenmacher-Formel für dicke Linsen

$$\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{d}{r_1 r_2} \right)$$

f Brennweite

r_1, r_2 Krümmungsradien der Oberfläche

n Brechungsindex

d Dicke der Linse bzw. Abstand der Hauptebenen

für $d \rightarrow 0$
also vernachlässigbar klein

$$\Rightarrow \frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

Linsenmacher-Formel für dünne Linsen

Die Brennweite der Linse ist also umso kleiner (d.h. die Brechkraft umso größer), je größer die Krümmungen der Oberflächen der Linse sind.

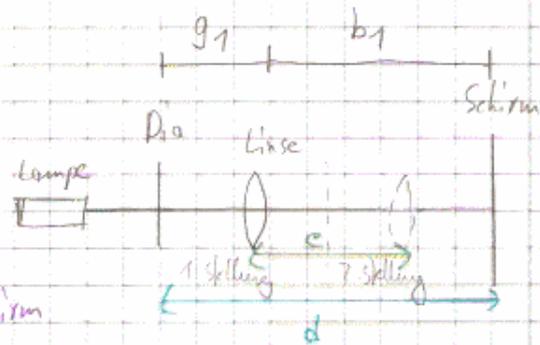
2.3 Als Lichtquelle diene eine Lampenwendel, die im Brennpunkt einer Sammellinse steht. Hat das Strahlenbündel nach Durchlaufen der Linse konstanten Querschnitt (→ Parallelstrahl)?

Die Lichtquelle steht zwar im Brennpunkt der Linse, doch können die emittierten Lichtstrahlen einer Lampenwendel nicht als radial-symmetrisch angesehen werden. Nur in diesem Fall (einer genau punktförmigen, radial-symmetrischen Quelle) werden die ^{emittierten} Strahlen zu Parallelstrahlen gebrochen, da sie alle im Brennpunkt entstehen und somit durch ihn durchlaufen.

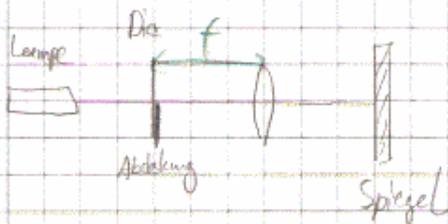
3. Versuchsablauf

Besselverfahren

Mit einer Lichtquelle wird das Bild eines Dias so auf den Schirm projiziert, dass es für zwei verschiedene Stellungen der Linse scharf abgebildet wird. Dabei muss die Entfernung zwischen Gegenstand und Bild größer als die 4-fache Brennweite der Linse sein. Die Zweckstellung der Linse, mit der ein scharfes Bild eingeschult werden kann ist symmetrisch zur Mitte des Abstands Dia - Schirm. Zur Bestimmung der Brennweite der Bikonvexlinse werden 5 Wertepaare von d und e (s. Skizze) gemessen. Zur Bestimmung der Brennweite einer Bikonkavlinse wird ein Linsensystem mit der verwendeten Bikonvexlinse gebildet, da die Bikonkavlinse allein die Strahlen weiter streuen würde und somit nur ein virtuelles Bild entsteht. Hier werden wieder 5 Wertepaare von d und e gemessen.

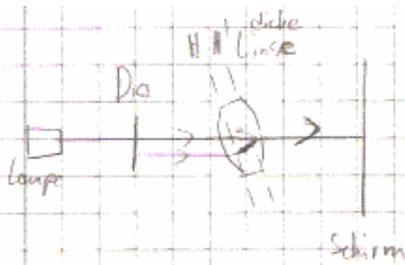


Autokollimation und Bestimmung des Hauptebenenabstandes



Ein Dia wird zwischen Lichtquelle und Linse so verschoben, dass es im Abstand der Brennweite von der

Linse steht und somit das Bild scharf und gleich groß projiziert wird. Durch einen Spiegel in der Gegenstandsebene werden alle Lichtstrahlen, die nach Brechung an der Linse parallel verlaufen (da Dia im Brennpunkt steht) am Spiegel reflektiert und somit entsteht auf der abgedeckten Diahalte ein mit dem oberen Dia identisches Bild.



Nun wird der Spiegel gegen einen Schirm ausgetauscht. Die dicke Linse wird nun so vor den Schirm gebracht, dass sich das Bild bei Schwenken

nicht (wesentlich) bewegt. Die Linse wird dann um 180° gedreht und mit der Mikrometerschraube wieder die Stellung gesucht bei der sich das Bild bei Schwenken der Linse nicht mehr bewegt. Diese Messung des Hauptebenenabstandes wird 5 Mal mit verschiedenen Abständen vom Schirm durchgeführt und anschließend die Brennweite 5 mal nach dem Bessel-Verfahren (s.o.) bestimmt.

4. Formeln

Brennweite dünner Linsen nach dem Bessel-Verfahren

$$f = \frac{d^2 - e^2}{4d}$$

f Brennweite der Linse
d Abstand zwischen Draht und Schirm
e Abstand zwischen den beiden Linsenstellungen

Brennweite dicker Linsen nach dem Bessel-Verfahren

$$f = \frac{(d-h)^2 - e^2}{4(d-h)}$$

f Brennweite der dicken Linse
h Hauptebenenabstand der Linse

allgemeine Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

f Brennweite der Linse
g Gegenstandsweite
b Bildweite

Brechkraft zweier direkt hintereinander geschalteter Linsen

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

F Brennweite des Linsensystems
 f_1, f_2 Brennweiten der einzelnen Linsen

5. Messwerte

Besselverfahren

- Bikonvexlinse

d (Abstand Dia. Schirm) in cm e (Differenz der Linsenstellungen) in cm

1) 50

$$|43,9 - 35,9| = 12,0$$

2) 60

$$|42,8 - 47,1| = 34,3$$

3) 70

$$|42,3 - 57,6| = 45,3$$

4) 55

$$|43,7 - 41,7| = 28,6$$

5) 45

$$|45,4 - 30,0| = 14,6$$

- Linsensystem Bikonkav- / Bikonvexlinse

1) 140

$$83,1 - 26,5 = 56,6$$

2) 100

$$71,9 - 27,8 = 44,1$$

3) 90

$$59,3 - 30,6 = 28,7$$

4) 120

$$93,7 - 25,5 = 68,2$$

5) 105

$$77,2 - 27,2 = 50,0$$

Autokollimation und Bestimmung der Hauptpunkte,

Stiftstellung d_1 in cm Stiftstellung d_2 in cm d in cm

5,07

5,69

0,62

5,09

5,71

0,62

5,07

5,70

0,63

5,08

5,64

0,56

5,04

5,65

0,61

Abstand d (Dra-Schirm)

60,0

~~65,0~~

70,0

75,0

55,0

Abstände e (Differenz d.
Linsenstellungen)

~~42,0~~ - ~~17,4~~ = 24,6

~~47,6~~ - 16,6 = 31,0

53,2 - 16,0 = 37,2

58,5 - 15,5 = 43,0

35,4 - 18,7 = 16,7

A.S. 08
Schmidt

6 Auswertung

a) Bestimmung der Brennweite der Bikonvexlinse

Brennweiten der Messungen 1) bis 5):

$$f_1 = \frac{d_1^2 - e_1^2}{4d_1} = \frac{50^2 - 22,0^2}{4 \cdot 50} \text{ cm} = 10,08 \text{ cm}$$

$$f_2 = \frac{60^2 - 24,3^2}{4 \cdot 60} \text{ cm} \approx 10,10 \text{ cm}$$

$$f_3 = \frac{70^2 - 45,3^2}{4 \cdot 70} \text{ cm} \approx 10,17 \text{ cm}$$

$$f_4 = \frac{55^2 - 28,6^2}{4 \cdot 55} \text{ cm} \approx 10,03 \text{ cm}$$

$$f_5 = \frac{45^2 - 14,6^2}{4 \cdot 45} \text{ cm} \approx 10,07 \text{ cm}$$

Mittelwert f_0 der berechneten Brennweiten:

$$f_0 = \frac{\sum_{i=1}^5 f_i}{5} = \frac{1}{5} (10,08 + 10,10 + 10,17 + 10,03 + 10,07) \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \underline{f_0 \approx 10,09 \text{ cm}}$$

✓

b) Bestimmung der Brennweite der Bikonkavlinse

Brennweiten F_n des Linsensystems der Messungen 1) bis 5)

$$F_1 = \frac{d_1^2 - e_1^2}{4d_1} = \frac{(110\text{cm})^2 - (56,6\text{cm})^2}{4 \cdot 110\text{cm}} \approx +20,22\text{cm}$$

$$F_2 = \frac{100^2 - 44,1^2}{4 \cdot 100} \text{cm} \approx +20,14\text{cm}$$

$$F_3 = \frac{90^2 - 28,7^2}{4 \cdot 90} \text{cm} \approx +20,21\text{cm}$$

$$F_4 = \frac{120^2 - 68,2^2}{4 \cdot 120} \text{cm} \approx +20,31\text{cm}$$

$$F_5 = \frac{105^2 - 50,0^2}{4 \cdot 105} \text{cm} \approx +20,30\text{cm}$$

Mittelwert F_n der berechneten Brennweiten:

$$F = \frac{\sum_{n=1}^5 F_n}{5} = \frac{1}{5} (20,22 + 20,14 + 20,21 + 20,31 + 20,30)\text{cm}$$

$$\Rightarrow \underline{F \approx +20,24\text{cm}}$$

Berechnung der Brennweite f_b der Bikonkavlinse:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_a} + \frac{1}{f_b}$$

$$\Rightarrow f_b = \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{f_a} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{20,24\text{cm}} - \frac{1}{10,09\text{cm}} \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \underline{f_b \approx -20,12\text{cm}}$$

(das Minuszeichen weist darauf hin, dass sich der Brennpunkt der Bikonkavlinse bei gleichseitiger Lichtquelle im Vergleich zur Bikonvexlinse auf der anderen Seite befindet)



c) Hauptebenenabstand und Brennweite der dicken Linse

Bestimmung des Mittelwerts der gemessenen Hauptebenenabstände:

$$h = \frac{\sum_{i=1}^5 h_i}{5} = \frac{1}{5} (0,62 + 0,62 + 0,63 + 0,58 + 0,61) \text{ cm}$$

$$h \approx \underline{0,608 \text{ cm}}$$

✓

Bestimmung der Brennweite f_d der dicken Linse der Messungen

1) bis 5) nach dem Bessel-Verfahren

$$f_n = \frac{(d_n - h)^2 - e_n^2}{4(d_n - h)}$$

$$f_1 = \frac{(60,0 \text{ cm} - 0,61 \text{ cm})^2 - (24,6 \text{ cm})^2}{4(60,0 \text{ cm} - 0,61 \text{ cm})} \approx 18,30 \text{ cm}$$

$$f_2 = \frac{(65 - 0,61)^2 - 31,0^2}{4 \cdot (65 - 0,61)} \text{ cm} \approx 12,37 \text{ cm}$$

$$f_3 = \frac{(70 - 0,61)^2 - 37,2^2}{4(70 - 0,61)} \text{ cm} \approx 12,36 \text{ cm}$$

$$f_4 = \frac{(75 - 0,61)^2 - 43,0^2}{4 \cdot (75 - 0,61)} \text{ cm} \approx 12,38 \text{ cm}$$

$$f_5 = \frac{(55 - 0,61)^2 - 16,7^2}{4 \cdot (55 - 0,61)} \text{ cm} \approx 12,32 \text{ cm}$$

Mittelwert f_d der berechneten Brennweiten:

$$f_d = \frac{\sum_{i=1}^5 f_i}{5} = \frac{1}{5} (12,30 + 12,37 + 12,36 + 12,38 + 12,32)$$

$$\Rightarrow \underline{f_d \approx 12,35 \text{ cm}}$$

✓

7. Fehlerrechnung

a) Berechnung der Brennweite der Bikonvexlinse, Fehlerfortpflanzung
geschätzte Abweichung der Werte von d und e vom
wahren Wert.

$$\Delta d = \pm 0,4 \text{ cm}$$

Ablesungs- bzw.

$$\Delta e = \pm 0,3 \text{ cm}$$

Schätzstellungsfehler

absoluter Fehler Δf :

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial d} \right| \Delta d + \left| \frac{\partial f}{\partial e} \right| \Delta e$$

$$= \left| \frac{1}{4} \cdot \frac{d \cdot 2d - (d^2 + e^2) \cdot 1}{d^2} \right| \Delta d + \left| \frac{-2e}{4d} \right| \Delta e$$

$$= \left| \frac{d^2 + e^2}{d^2} \right| \frac{\Delta d}{4} + \left| \frac{e}{2d} \right| \Delta e$$

$$\Delta f_1 = \left| \frac{(50 \text{ cm})^2 + (22,0 \text{ cm})^2}{(50 \text{ cm})^2} \right| \cdot 0,1 \text{ cm} + \left| \frac{22,0 \text{ cm}}{2 \cdot 50 \text{ cm}} \right| \cdot 0,3 \text{ cm} \approx 0,19 \text{ cm}$$

$$\Delta f_2 = \left| \frac{60^2 + 34,3^2}{60^2} \right| \cdot 0,1 \text{ cm} + \left| \frac{34,3}{2 \cdot 60} \right| \cdot 0,3 \text{ cm} \approx 0,22 \text{ cm}$$

$$\Delta f_3 = \left| \frac{70^2 + 45,3^2}{70^2} \right| \cdot 0,1 \text{ cm} + \left| \frac{45,3}{2 \cdot 70} \right| \cdot 0,3 \text{ cm} \approx 0,24 \text{ cm}$$

$$\Delta f_4 = \left| \frac{55^2 + 28,6^2}{55^2} \right| \cdot 0,1 \text{ cm} + \left| \frac{28,6}{2 \cdot 55} \right| \cdot 0,3 \text{ cm} \approx 0,21 \text{ cm}$$

$$\Delta f_5 = \left| \frac{45^2 + 14,6^2}{45^2} \right| \cdot 0,1 \text{ cm} + \left| \frac{14,6}{2 \cdot 45} \right| \cdot 0,3 \text{ cm} \approx 0,16 \text{ cm}$$

$$\Delta f_{\max} = 0,24 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow f_d = 10,09 \text{ cm} \pm 0,24 \text{ cm}$$



b) Fehlerfortpflanzung bei der Berechnung der Brennweite des Gittersystems

$$\Delta d = \pm 0,4 \text{ cm}$$

Ablesungs- bzw.

$$\Delta e = \pm 0,3 \text{ cm}$$

Schätzstellungsfehler

$$\Delta F = \left| \frac{d^2 + e^2}{d^2} \right| \frac{\Delta d}{4} + \left| \frac{e}{2d} \right| \Delta e$$

$$\Delta F_1 = \left| \frac{(110 \text{ cm})^2 + (56,6 \text{ cm})^2}{(110 \text{ cm})^2} \right| \cdot 0,1 \text{ cm} + \left| \frac{56,6 \text{ cm}}{2 \cdot 110 \text{ cm}} \right| \cdot 0,3 \text{ cm} \approx 0,20 \text{ cm}$$

$$\Delta F_2 = \left| \frac{100^2 + 44,7^2}{100^2} \right| \cdot 0,1 \text{ cm} + \left| \frac{44,7}{2 \cdot 100} \right| \cdot 0,3 \text{ cm} \approx 0,19 \text{ cm}$$

$$\Delta F_3 = \left| \frac{90^2 + 28,7^2}{90^2} \right| \cdot 0,1 \text{ cm} + \left| \frac{28,7}{2 \cdot 90} \right| \cdot 0,3 \text{ cm} \approx 0,16 \text{ cm}$$

$$\Delta F_4 = \left| \frac{120^2 + 68,2^2}{120^2} \right| \cdot 0,1 \text{ cm} + \left| \frac{68,2}{2 \cdot 120} \right| \cdot 0,3 \text{ cm} \approx 0,22 \text{ cm}$$

$$\Delta F_5 = \left| \frac{100^2 + 50,0^2}{105^2} \right| \cdot 0,1 \text{ cm} + \left| \frac{50,0}{2 \cdot 105} \right| \cdot 0,3 \text{ cm} \approx 0,19 \text{ cm}$$

$$\Delta F_{\max} = 0,22 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow F = 20,24 \text{ cm} \pm 0,22 \text{ cm}$$

Fehler bei der Berechnung der Brennweite f_b der Bikonkavlinse

$$f_{b1} = \left(\frac{1}{F_{\max}} - \frac{1}{f_{o,\max}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{20,46 \text{ cm}} - \frac{1}{10,33 \text{ cm}} \right)^{-1} \approx -20,86 \text{ cm}$$

$$f_{b2} = \left(\frac{1}{F_{\max}} - \frac{1}{f_{o,\min}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{20,46 \text{ cm}} - \frac{1}{9,85 \text{ cm}} \right)^{-1} \approx -18,99 \text{ cm}$$

$$f_{b3} = \left(\frac{1}{F_{\min}} - \frac{1}{f_{o,\min}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{20,22 \text{ cm}} - \frac{1}{9,85 \text{ cm}} \right)^{-1} \approx -19,39 \text{ cm}$$

$$f_{b4} = \left(\frac{1}{F_{\min}} - \frac{1}{f_{o,\max}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{20,22 \text{ cm}} - \frac{1}{10,33 \text{ cm}} \right)^{-1} \approx -21,34 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \Delta f_{b,\max} = |-20,12 \text{ cm} + 21,34 \text{ cm}| = 1,22 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow f_b = -20,12 \text{ cm} \pm 1,22 \text{ cm}$$

c) Fehler der Bestimmung des Hauptebenenabstandes h

Messung	h_i in cm	$ h_i - h $ in cm	$(h_i - h)^2$ in cm^2
1	0,62	0,012	$1,44 \cdot 10^{-4}$
2	0,62	0,012	$1,44 \cdot 10^{-4}$
3	0,63	0,024	$5,76 \cdot 10^{-4}$
4	0,56	-0,048	$2,304 \cdot 10^{-3}$
5	0,61	0,002	$4,0 \cdot 10^{-6}$
Σ	3,04	0	$3,172 \cdot 10^{-3}$

$$h = 0,608 = \sum_{i=1}^5 h_i \cdot \frac{1}{5}$$

Mittlerer Fehler der Einzelmessung:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (h_i - h)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{3,172 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2}{5-1}} \approx 0,028 \text{ cm}$$

Mittlerer Fehler des Mittelwerts:

$$\Delta h = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0,028 \text{ cm}}{\sqrt{5}} \approx 0,0126 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow h \approx 6,08 \text{ mm} \pm 0,13 \text{ mm}$$

Fehlerfortpflanzung bei der Berechnung der Brennweite der dicken Linse nach dem Bessel-Verfahren

$$f = \frac{(d-h)^2 - e^2}{4(d-h)}$$

geschätzte Abweichung der gemessenen Werte d und e vom wahren Wert:

$$\Delta d = \pm 0,1 \text{ cm}$$

$$\Delta e = \pm 0,3 \text{ cm}$$

Abweichung von dem Hauptebenenabstand h vom wahren Wert:

$$\Delta h = 0,13 \text{ mm} \stackrel{!}{=} 0,013 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \Delta f &= \left| \frac{\partial f}{\partial d} \right| \Delta d + \left| \frac{\partial f}{\partial e} \right| \Delta e + \left| \frac{\partial f}{\partial h} \right| \Delta h \\ &= \left| \frac{1}{4} \frac{(d-h) \cdot 2(d-h) - ((d-h)^2 - e^2) \cdot 1}{(d-h)^2} \right| \Delta d + \left| \frac{-2e}{4(d-h)} \right| \Delta e + \left| \frac{1 \cdot (d-h) \cdot (-2(d-h)) - ((d-h)^2 - e^2) \cdot 1}{4 \cdot (d-h)^2} \right| \Delta h \\ &= \left| \frac{2d^2 - 4dh + 2h^2 - d^2 + h^2 + e^2}{4(d-h)^2} \right| \Delta d + \left| \frac{e}{2(d-h)} \right| \Delta e + \left| \frac{-2d^2 + 4dh - 2h^2 + d^2 + h^2 - e^2}{4(d-h)^2} \right| \Delta h \\ &= \left| \frac{d^2 - 2dh + h^2 + e^2}{4(d-h)^2} \right| \Delta d + \left| \frac{e}{2(d-h)} \right| \Delta e + \left| \frac{-d^2 + 2dh - h^2 - e^2}{4(d-h)^2} \right| \Delta h \\ &= \left| \frac{1}{4} + \frac{e^2}{4(d-h)^2} \right| \Delta d + \left| \frac{e}{2(d-h)} \right| \Delta e + \left| \frac{1}{4} + \frac{e^2}{4(d-h)^2} \right| \Delta h \end{aligned}$$

\Rightarrow Δh sehr klein, ist zu vernachlässigen ≈ 0

$$\Rightarrow \Delta f \approx \left| 1 + \frac{e^2}{(d-h)^2} \right| \frac{\Delta d}{4} + \left| \frac{e}{2(d-h)} \right| \Delta e$$

$$\Delta f_1 = \left| 1 + \frac{24,6^2}{(60-0,61)^2} \right| \cdot 0,025 \text{ cm} + \left| \frac{24,6}{2(60-0,61)} \right| \cdot 0,3 \text{ cm} \approx 0,09 \text{ cm}$$

$$\Delta f_2 = \left| 1 + \frac{31,0^2}{(65-0,61)^2} \right| \cdot 0,025 \text{ cm} + \left| \frac{31,0}{2(65-0,61)} \right| \cdot 0,3 \text{ cm} \approx 0,10 \text{ cm}$$

$$\Delta f_3 = \left| 1 + \frac{37,2^2}{(70-0,61)^2} \right| \cdot 0,025 \text{ cm} + \left| \frac{37,2}{2(70-0,61)} \right| \cdot 0,3 \text{ cm} \approx 0,10 \text{ cm}$$

$$\Delta f_4 = \left| 1 + \frac{43,0^2}{(75-0,61)^2} \right| \cdot 0,025 \text{ cm} + \left| \frac{43,0}{2(75-0,61)} \right| \cdot 0,3 \text{ cm} \approx 0,12 \text{ cm}$$

$$\Delta f_5 = \left| 1 + \frac{16,7^2}{(55-0,61)^2} \right| \cdot 0,025 \text{ cm} + \left| \frac{16,7}{2(55-0,61)} \right| \cdot 0,3 \text{ cm} \approx 0,07 \text{ cm}$$

$$\Delta f_{d, \max} = 0,12 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow f_d = 12,35 \text{ cm} \pm 0,12 \text{ cm}$$

✓