d) Grenzwert

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{x}{a}\right)$$

$$2a = a + \frac{x}{a}$$

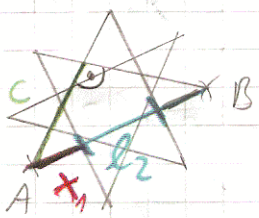
$$a = \frac{x}{a}$$

$$a^2 = x$$

$$a = \pm\sqrt{x}$$

- $-\sqrt{x}$ kann kein Grenzwert sein, da alle Folgenglieder positiv sind $\Rightarrow$ $+\sqrt{x}$ ist Grenzwert der Folge //

H 49 Christian Niederweiler 2420620



$$\overline{AB} = l_1 = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{l_1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{I)}\ l_1 = 2x_1 + l_2 \quad ; \quad \text{II)}\ l_1 = c\sqrt{2} \quad ; \quad \text{III}\ x_1 = l_1 - c$$

II u. III in I): $l_1 = 2(l_1 - c) + l_2 = 2l_1 - 2\frac{l_1}{\sqrt{2}} + l_2$

$$\Rightarrow \quad 0 = l_1 - l_1\sqrt{2} + l_2$$

$$\Rightarrow \quad l_2 = (\sqrt{2} - 1)\, l_1$$

allgemein: $\quad l_{n+1} = (\sqrt{2} - 1)\, l_n$

bzw. $\quad \frac{l_n}{l_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$ //

Länge der schwarzen Randlinien:

$$l_1 = 2x_1 + l_2 \quad \Rightarrow x_1 = \tfrac{1}{2}(l_1 - l_2) = \tfrac{1}{2}(l_1 - (\sqrt{2}-1)l_1)$$

$$x_1 = \tfrac{1}{2} l_1 (1 - \sqrt{2} + 1) = (1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}})\, l_1$$

allgemein:

$$l_n = 2x_n + l_{n+1}$$

$$x_n = \tfrac{1}{2}(l_n - l_{n+1}) = \tfrac{1}{2}(l_n - (\sqrt{2}-1)l_n) = (1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}})\, l_n$$

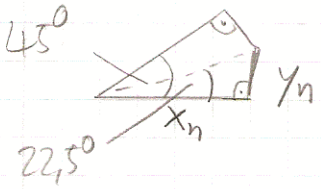
$$x_{n+1} = \tfrac{1}{2}(l_{n+1} - l_{n+2}) = (1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}})\, l_{n+1} = (1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}})(\sqrt{2}-1)^1 l_n \quad \text{usw.}$$

Summe der schwarzen Randlinien:

$$S = 16 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 16 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}})(\sqrt{2}-1)^i$$

$$= (16 - 8\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{1 - (\sqrt{2}-1)} = \frac{16 - 8\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = 8 \quad //$$

Summe der grauen Flächen:



$$\tan 22{,}5^\circ = \frac{y_n}{x_n} \qquad y_n = x_n \cdot \tan 22{,}5^\circ$$

$$A_n = 8 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x_n \cdot y_n = 8 \cdot \tan 22{,}5^\circ \cdot x_n^2$$

$$\cancel{A = 8 \cdot \tan 22{,}5^\circ}$$

$$A_{ges} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} 8 \cdot \tan 22{,}5^\circ \cdot x_n^2 = 8 \cdot \tan 22{,}5^\circ \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot (\sqrt{2}-1)^{2i}$$

$$A_{ges} = 8 \cdot \tan 22{,}5^\circ \cdot \left(1-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (2-2\sqrt{2}+1)^i$$

$$= (12-8\sqrt{2}) \tan 22{,}5^\circ \cdot \frac{1}{1-2+2\sqrt{2}-1} = \tan 22{,}5^\circ \cdot \frac{12-8\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}$$

$$= \tan 22{,}5^\circ \cdot \frac{(6-4\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{2-1} = \tan 22{,}5^\circ \left(6\sqrt{2}-8+6-4\sqrt{2}\right)$$

$$A_{ges} = \tan 22{,}5^\circ \left(2\sqrt{2}-2\right) \approx 0{,}46$$

H47 Christian Niedermeier 2420620

a) $a_n = \frac{n^2+2}{n^2+1}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{n^2+2} = \frac{n^2+2n+3}{n^2+2n+2} \cdot \frac{n^2+1}{n^2+2}$$

$$= \frac{n^4+2n^3+3n^2+n^2+2n+3}{n^4+2n^3+2n^2+2n^2+4n+4} = \frac{n^4+2n^3+4n^2+2n+3}{n^4+2n^3+4n^2+4n+4} < 1$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a_n$ ist monoton fallend

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+\underbrace{\tfrac{2}{n^2}}_{\to 0})}{n^2(1+\underbrace{\tfrac{1}{n^2}}_{\to 0})} = \frac{1}{1} = 1$$

Folge konvergiert, ist damit sicher Cauchy-Folge

$$\left.\begin{array}{ll} \text{untere Schranke:} & U = \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \\ \text{obere " :} & S = a_1 = \frac{1+2}{1+1} = 1{,}5 \end{array}\right\} \to \text{(da monoton fallend)}$$

kleinstes $n_{0,01}$ für zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder

$$\frac{n^2+2}{n^2+1} - \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} < 0{,}01$$

$$\frac{(n^2+2)(n^2+2n+2) - (n^2+2n+3)(n^2+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} < 0{,}01$$

$$\frac{\cancel{n^4}+\cancel{2n^3}+\cancel{2n^2}+\cancel{2n^2}+4n+4-(\cancel{n^4}+\cancel{2n^3}+\cancel{3n^2}+\cancel{n^2}+2n+3)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} < 0{,}01$$

$$\frac{2n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} < 0{,}01$$

$$200n + 100 < n^4+2n^3+2n^2+n^2+2n+2$$

$$n^4+2n^3+3n^2-198n-98 > 0$$

gilt für $n \geq 6 \Rightarrow n_{0,01} = 6$ //

(Hab ich durch Ausprobieren mit dem TR rausgefunden, da ich kein Plan hab wie man die Ungleichung sonst lösen soll)

b) $b_n = (-1)^n \frac{e^n}{4^n+5}$

$\frac{e^n}{4^n+5} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$(-1)^n \begin{cases} =1 & n \text{ gerade} \\ =-1 & n \text{ ungerade} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Folge nicht monoton, da alternierende Folge

$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{4^n+5} = \lim_{n\to\infty} \text{"}\frac{e^n}{4^n}\text{"} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e}{4}\right)^n = 0$

da $\frac{e}{4} < 1$

Folge konvergiert gegen 0

$\rightarrow$ ist somit Cauchy-Folge

obere Schranke: $S = b_2 = (-1)^2 \cdot \frac{e^2}{16+5} = \frac{e^2}{21}$

untere " : $U = b_1 = (-1)^1 \cdot \frac{e^1}{4+5} = -\frac{e}{9}$

b_n alternierende Folge

$\rightarrow$ zwei aufeinander folgende Folgenglieder b_n und b_{n+1} addieren sich schnell zu einem Wert über ε auf $|b_n - b_{n+1}|$

da wenn $b_n > 0 \Rightarrow b_{n+1} < 0$ und andersrum

$\Rightarrow |b_n - b_{n+2}| < 0{,}01$ gesucht!

$\Rightarrow \frac{e^n}{4^n+5} - \frac{e^{n+2}}{4^{n+2}+5} < 0{,}01$

$\rightarrow$ Wieder Ausprobieren mit TR $\Rightarrow$ gilt für $n \geq 11 \Rightarrow n_{0,01} = 11$ //

* Probe: $|b_n - b_{n+1}| < 0{,}01$

also $\frac{e^n}{4^n+5} + \frac{e^{n+1}}{4^{n+1}+5} < 0{,}01$

gilt erst ab $n \geq 14$

$\Rightarrow n_{0,01} = 11$ //

H47 Christian Niedermeier 2420620

c) $c_n = n - \frac{1}{n}$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+1-\frac{1}{n+1}}{n-\frac{1}{n}} = \frac{(n+1)^2-1}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2-1}{n}\right)^{-1}$$

$$= \frac{n^2+2n}{n+1} \cdot \frac{n}{n^2-1} = \frac{n^3+2n^2}{n^3+n^2-n-1} > 1$$

da: $2n^2 > n^2-n-1$

also $n^2+n+1 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\square$

$\Rightarrow$ Folge ist monoton steigend

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}\right) = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

$\Rightarrow$ Folge divergiert

$\Rightarrow$ ist somit <u>keine</u> Cauchy Folge

untere Schranke: $U = c_1 = 1 - \frac{1}{1} = 0$ //

H 4f Christian Niedermeier 2420620

a) (IA) $n=1$: $a_0 = x+1$ $x_0 > 0$ da $x \geq 0$

(IS) gilt: $a_{n-1} > 0 \Rightarrow a_n > 0$

$$a_n = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{a_{n-1}}_{>0} + \underbrace{\frac{\overset{\geq 0}{x}}{\underset{>0}{a_{n-1}}}}_{\geq 0}\Big) > 0$$

$\Rightarrow$ alle Folgenglieder $a_n > 0$ $\square$

b) $n \geq 0$

$a_n \geq \sqrt{x}$ $\quad | \uparrow^2 \quad$ ($a_n > 0$, siehe a))

$a_n^2 - x \geq 0$

$\left(\frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}}\right)\right)^2 - x \geq 0$

$\frac{1}{4}\left(a_{n-1}^2 + 2x + \frac{x^2}{a_{n-1}^2}\right) - x \geq 0$

$a_{n-1}^2 - 2x + \frac{x^2}{a_{n-1}^2} \geq 0$

$$\underbrace{\left(a_{n-1} - \frac{x}{a_{n-1}}\right)^2}_{>0} \geq 0$$

✓ $\rightarrow a_n \geq \sqrt{x}$ $\square$

c) $\sqrt{x} \leq a_n$ und $\frac{x}{a_n} \leq \sqrt{x}$

[da: $\frac{x^2}{a_n^2} \leq x$

$\Rightarrow x \leq a_n^2$

$\sqrt{x} \leq a_n$ $\square$]

$\Rightarrow \frac{x}{a_n} \leq \sqrt{x} \leq a_n$

oder: $\frac{x}{a_n} \leq a_n \quad | + a_n$

$\frac{x}{a_n} + a_n \leq 2a_n$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)}_{a_{n+1}} \leq a_n$$

$\Rightarrow$ Folge monoton fallend