Wolf Wölfel

NLZ II Pfl 57 Zi 1-552

Tel 685-64812

mail: W.Woelfel@physik.uni-stuttgart.de

Literatur

- Paus (Experimentalphysik
- Tipler
- Herling Martin Stohrer

www.ihfg.uni-stuttgart.de/lehre/index.html

ROBERT ROßBACH
PWR 57 5-162 685-64958
r.rossbach@ihfg.uni-stuttgart.de

Experimentalphysik 1

Physik. Einheiten: SI-System

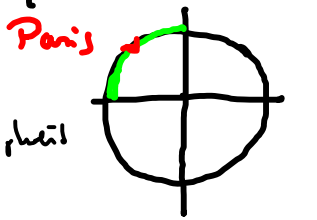
Basisgrößen	Basiseinheiten	Symbol	Formelzeichen	relative Unsicherheit
• Zeit	Sekunde	s	t	10^{-15}
• Länge	Meter	m	$s, l, x, y, z, d \ldots$	10^{-15}
• Masse	Kilogramm	kg	$m, M \ldots$	10^{-9}
• Temperatur	Kelvin	K	$T, \vartheta, \Theta, \ldots$	10^{-6}
• el. Stromstärke	Ampere	A	$I, i, j \ldots$	10^{-6}
• Lichtstärke	Candela	cd	I	$5 \cdot 10^{-3}$
• Stoffmenge	Mol	mol	(n)	10^{-6}

Teil 1: Mechanik

1) Kinematik

Ort, Abstand, Länge
in der Regel zeitabhängig } $s = s(t)$

a) Länge
Abstand zweier Orte
Einheit: 1 m
Definition: alt: 10^{-7}-Teil eines Erdquadranten



→ Urmeter rel. Genauigkeit 10^{-6}

neu: $1\,m = 1650763{,}73 \cdot \lambda(^{86}Kr)$
10^{-15} rel. Genauigkeit

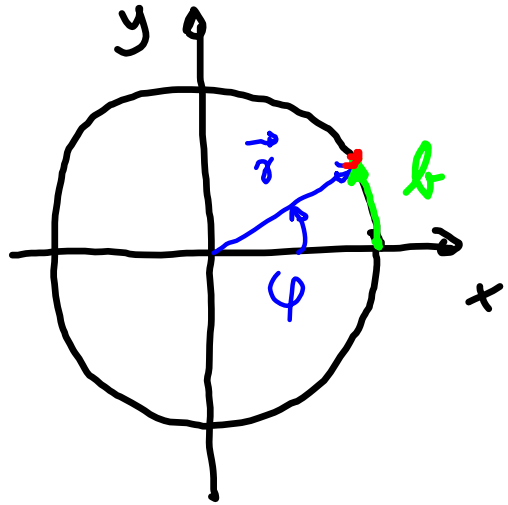
Längenmessung:

Gerät	Auflösung
Meterstab	1 mm
Schiebelehre (Nonius)	100 µm
Mikrometerschraube	10 µm
Mikroskop	1 µm
Michelson-Interferometer	0,1 µm

Titel: Okt 19 - 08:45 (4 von 4)

Drehende Systeme

Winkel



ebener Winkel φ

$$1 \text{ Grad} = 1^\circ = \frac{1}{360} \text{ Vollkreis}$$

$$1 \text{ Radiant} = 1 \text{ rad} = \frac{b}{r} \quad \text{Einheit } \frac{m}{m} = 1$$

Vollkreis $\quad 360^\circ \mathrel{\hat{=}} 2\pi \approx 6{,}28$ rad

Umfang $U = 2r \cdot \pi$

$1 \text{ rad} \approx 57{,}3^\circ$

b. Zeit

Basisgröße, Einheit 1 s

Definition: Astronomische Zeit

Jahr = 365,25 Sonnentage

= 366,25 Sternentage

$1\,s = \frac{1}{84\,400}$ des mittleren Sonnentages

Schwankungen 2–4 ms

zu ungenau → seit 1967:

mikroskopische Zeit

Frequenz atomarer Schwingungen
(frei von Schwerkraftein flüssen)

$$\nu = \frac{\text{Zahl der Perioden}}{\text{Zeitintervall}} = \frac{n}{\Delta t} = \frac{1}{T}$$

T = Periodendauer

ν = Frequenz in Hertz

Zeitnormal: Atomuhr

Cäsium $^{132}Cs \rightarrow T$

$1s = 9192631770_{,\ldots} \cdot T$

$\nu = 9{,}192\ldots\ GHz$

Kombination von Weg und Zeit → Geschwindigkeit

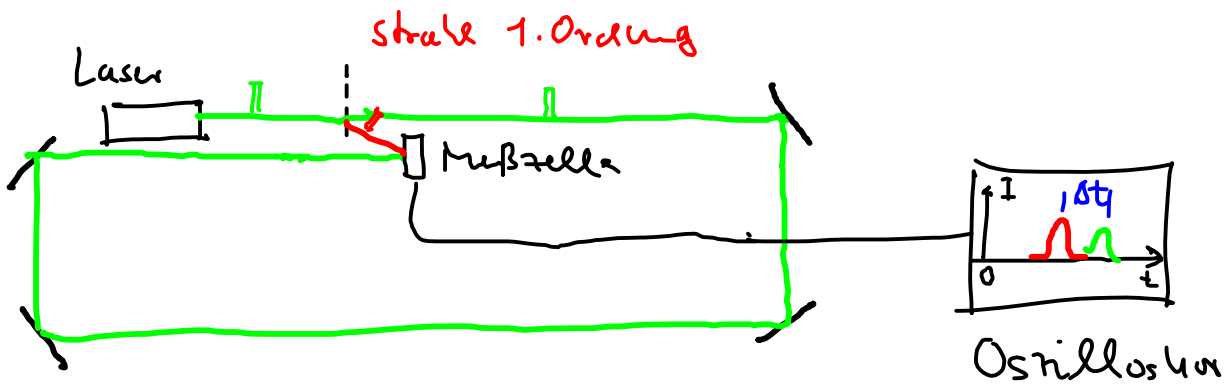
Geschwindigkeit v

größtmögliche Geschwindigkeit: Lichtgeschwindigkeit

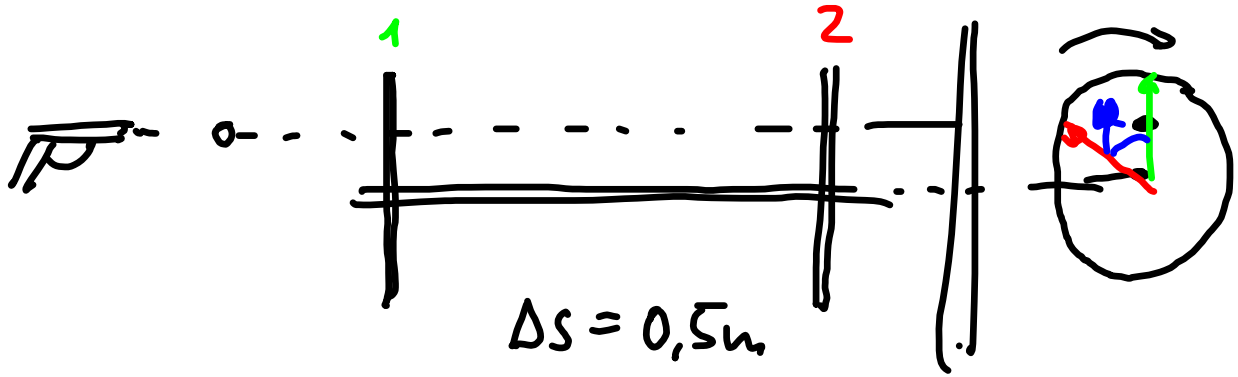
$$\boxed{c = 299792458\ \frac{m}{s}}$$

$\frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$

Exp



Exp: Geschwindigkeit einer Pistolenkugel



$\Delta s = 0{,}5\,m$

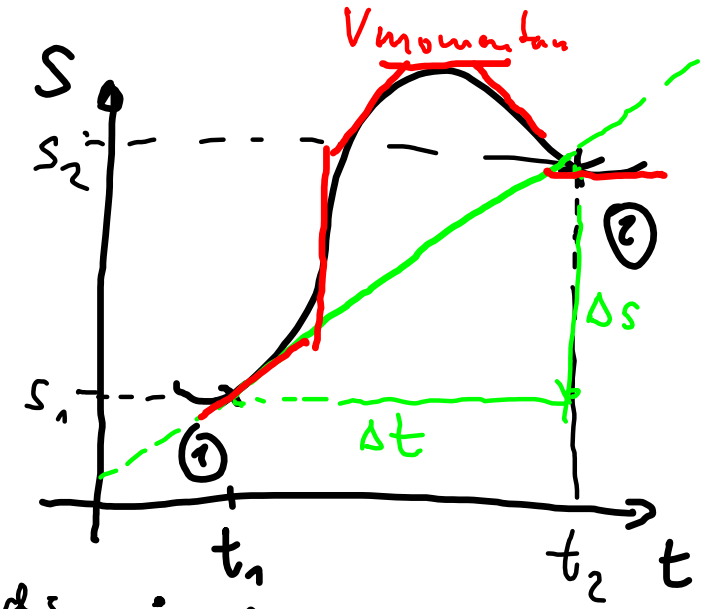
Drehzahl $n = 3\,600\ min^{-1}$

c) Bewegung

Geschwindigkeit

eindimensional

$$V = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{(mittl. Geschw.)}$$



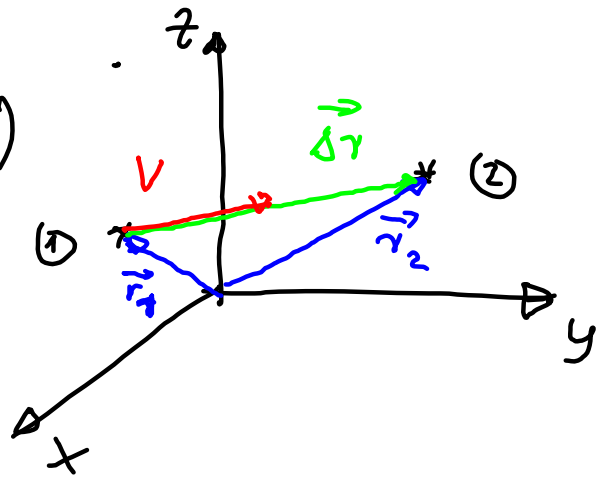
$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d}{dt} s = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad \text{(momentane Geschw.)}$$

dreidimensional

$$\vec{V} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \text{(mittl. Geschw.)}$$

$$\vec{V} = \frac{d}{dt} \Delta \vec{r} = \dot{\vec{r}}$$

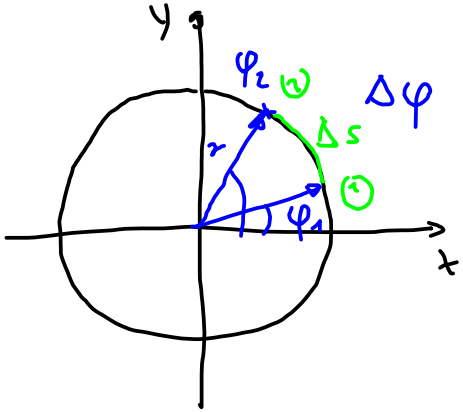
(mom. Geschw.)



Drehbewegung

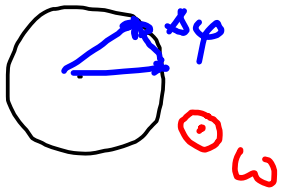
$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{(mittl. Winkelgeschw.)}$$

$$\omega = \frac{d}{dt}\varphi = \dot{\varphi} \quad \text{(mom. Geschw.)}$$



ω kann auch als Vektor geschrieben werden:

$\rightarrow \vec{\omega}$



$$\Delta s = r \cdot \Delta\varphi$$

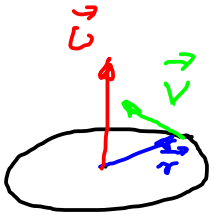
bei 360°: $\Delta s = r \cdot 2\pi = U$

U = Umfang

Vektor $\omega \perp$ zur Ebene, Richtung aus Ebene heraus (rechte Hand!)

Umrechnung: Winkelgeschw. $\leftrightarrow$ Tangentialgeschw.

$$\boxed{v = \omega \cdot r} \qquad \boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$



Umrechnung auf Drehzahl n

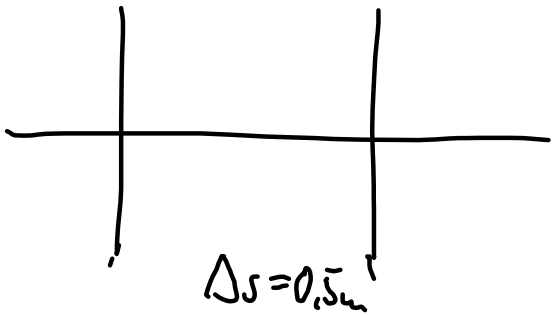
$$\boxed{\omega = 2\pi \cdot n}$$

n = Drehzahl = $\frac{\text{Umdrehung}}{\text{Sekunde}}$

Exp

Drehzahl $n = 3600\ min^{-1}$

$\rightarrow 60\ \frac{1}{s}$



$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ $\quad$ Δt gesucht: $\quad \omega = 2\pi \cdot n$

$= 2\pi \cdot 60\ \frac{1}{s}$

$= 377\ \frac{1}{s}$

$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$ $\quad$ $\Delta \varphi = \frac{36°}{360°} \cdot 2\pi = 0{,}63$

$\underline{\Delta t} = \frac{0{,}63}{377\ \frac{1}{s}} = \underline{1{,}67\ ms}$

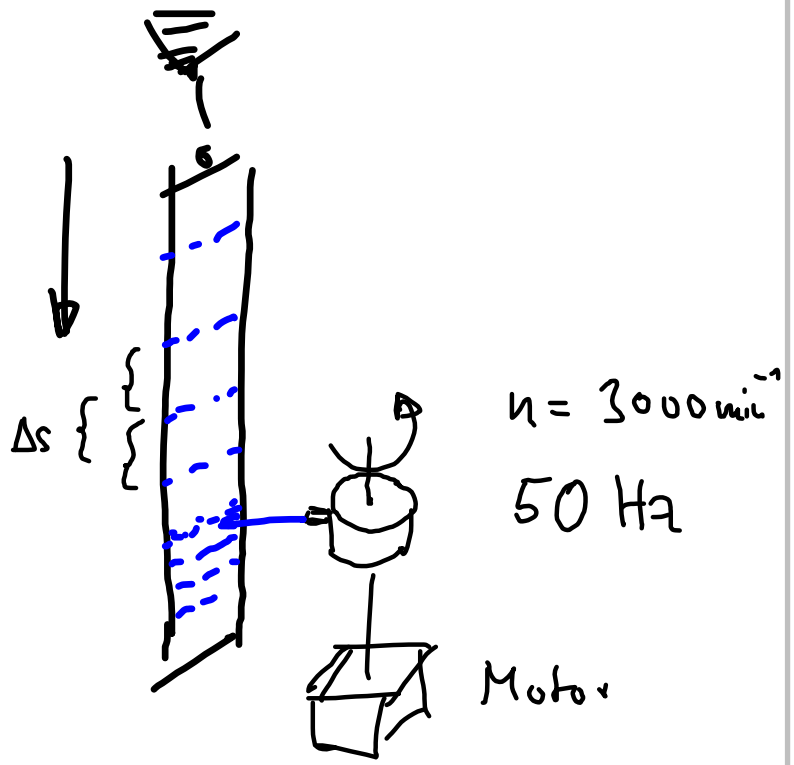
$v = \frac{0{,}5\ m}{0{,}00167\ s} = \underline{\underline{300\ \frac{m}{s}}}$

Beschleunigung

Exp. "Fallplatte"

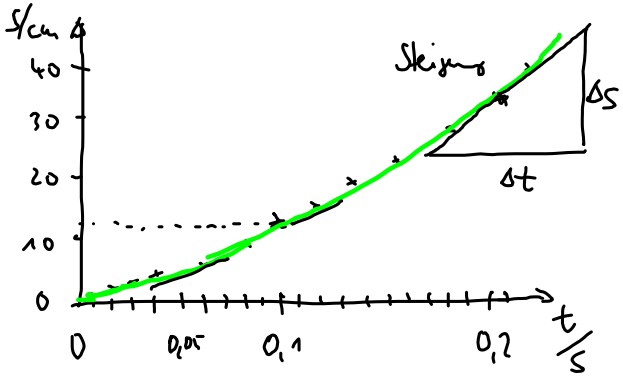
Tabelle d. Messwerte

t/s	s/cm	Δs/cm	Δ(Δs)
0	0	1,6	0,4
0,02	1,6	2,0	0,5
0,04	3,6	2,5	0,3
0,06	6,1	2,8	0,3
0,08	8,9	3,1	0,5
0,10	12,0	3,6	0,3
0,12	15,6	3,9	0,5
0,14	19,5	4,4	0,3
0,16	23,9	4,7	0,4
0,18	28,6	5,1	0,4
0,20	337,4	5,5	
0,22	392,0		



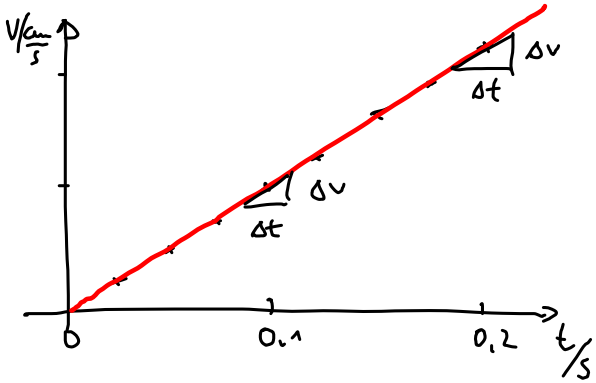
graphische Darstellung

1) Weg-Zeit-Diagramm



2) Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm

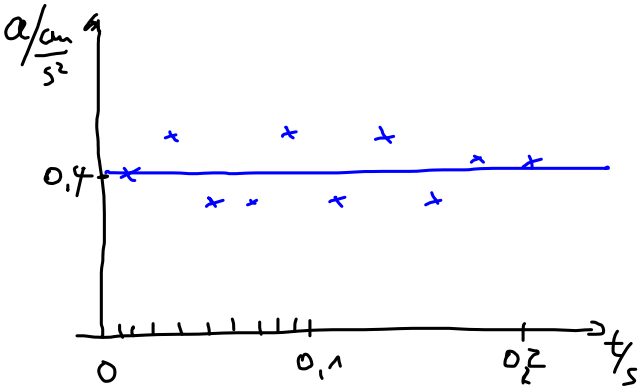
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d}{dt} s = \dot{s}$$



3) Beschleunigung-Zeit-Diagramm

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d}{dt} v = \dot{v} = \frac{d^2}{dt^2} s$$

$$= \frac{\Delta(\Delta s/\Delta t)}{\Delta t}$$



Zusammenfassung:

1) Zeitliche Änderung des Ortes (Ableitung nach Zeit)

→ Geschwindigkeit ≙ Steigung im Weg-Zeit-Diagramm

2) Zeitliche Änderung der Geschwindigkeit (Ableitung)

→ Beschleunigung ≙ Steigung der Geschw.-Zeit-Fkt

Umkehrung: Von der Beschleunigung zur Geschwindigkeit
↳ zum Weg durch Integration

1. Integration der $a(t)$-Fkt → $v(t)$-Fkt
2. Integration der $a(t)$-Fkt → $s(t)$-Fkt.

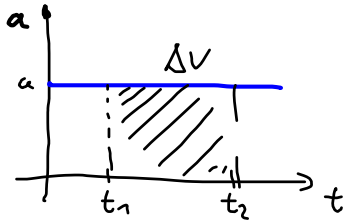
Integration der Beschleunigung:

1) Integration

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \quad \rightarrow \quad dv = a(t)\,dt$$

bestimmtes Integral

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$$



$$\Delta v = v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$$

Speziell $a(t) = a_0 = \text{const}$

$$\boxed{\Delta v = a_0 (t_2 - t_1)}$$

Integration der Beschleunigung

1. Integration

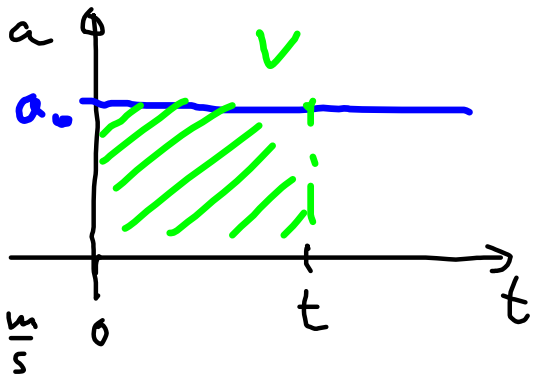
$$\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$$

Spezialfall $a(t) = a_0 = \text{const}$

$$\Delta v = a_0 (t_2 - t_1)$$

speziell, wenn $t_1 = 0 \rightarrow t_2 = t$, $v_0 = 0$

$$\boxed{v = a_0 \cdot t}$$



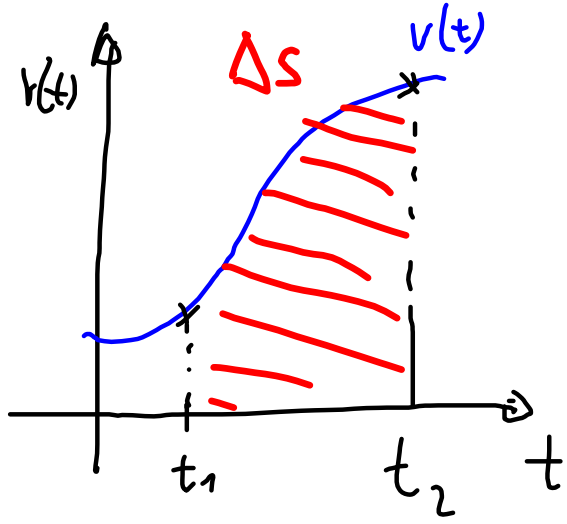
Beispiel $a_0 = g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$

freier Fall: $v(t=2s) = 19{,}62\,\frac{m}{s}$
$t = 2s$

2. Integration

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \quad \rightarrow \quad ds = v(t)\,dt$$

$$\int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

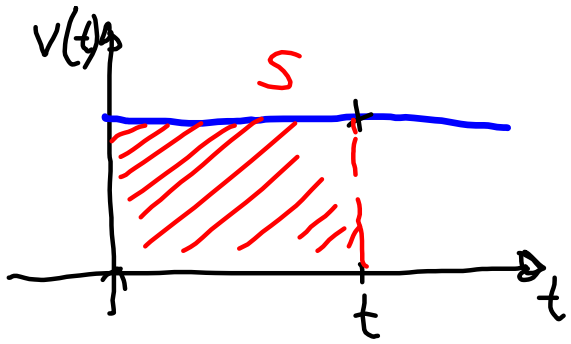


Spezialfall: $v(t) = v_0 = \text{const}$

$$\Delta s = v(t_2 - t_1) = v \cdot \Delta t$$

speziell: $s_0 = 0 \rightarrow s_2 = s$, $t_1 = 0 \rightarrow t_2 = t$

$$\boxed{s = v \cdot t}$$



Wenn $v(t) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$

$$\int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt \right) dt$$

speziell $a(t) = a_0 = \text{const}$

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} \left(v_0 + a_0 (t_2 - t_1) \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} v_0\,dt + \int_{t_1}^{t_2} a_0 (t_2 - t_1)\,dt$$

$$\boxed{\Delta s = s_0 + v_0 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a_0 (t_2 - t_1)^2}$$

Speziell: $t_1 = 0 \Rightarrow t_2 = t$, $s_1 = 0$ $s_2 = s$

$$\boxed{s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2}$$

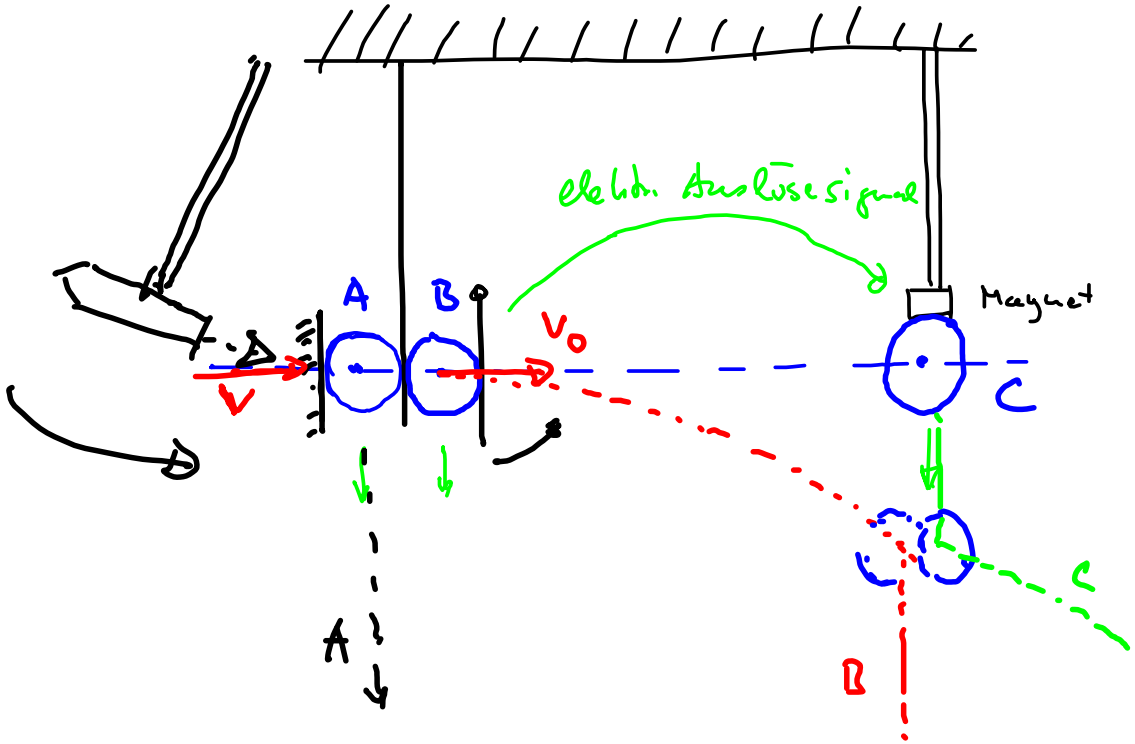
Sonderfall $s_0 = 0$, $v_0 = 0$

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2} \qquad a_0 = g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$$

Zusammenfassung:

1) bei $a = \text{const}$ nimmt v proportional zur Zeit zu.
2) bei $a = \text{const}$ nimmt Weg s quadratisch mit der Zeit zu (Parabel)

Exp Horizontaler Wurf mit drei Kugeln



Beobachtung:

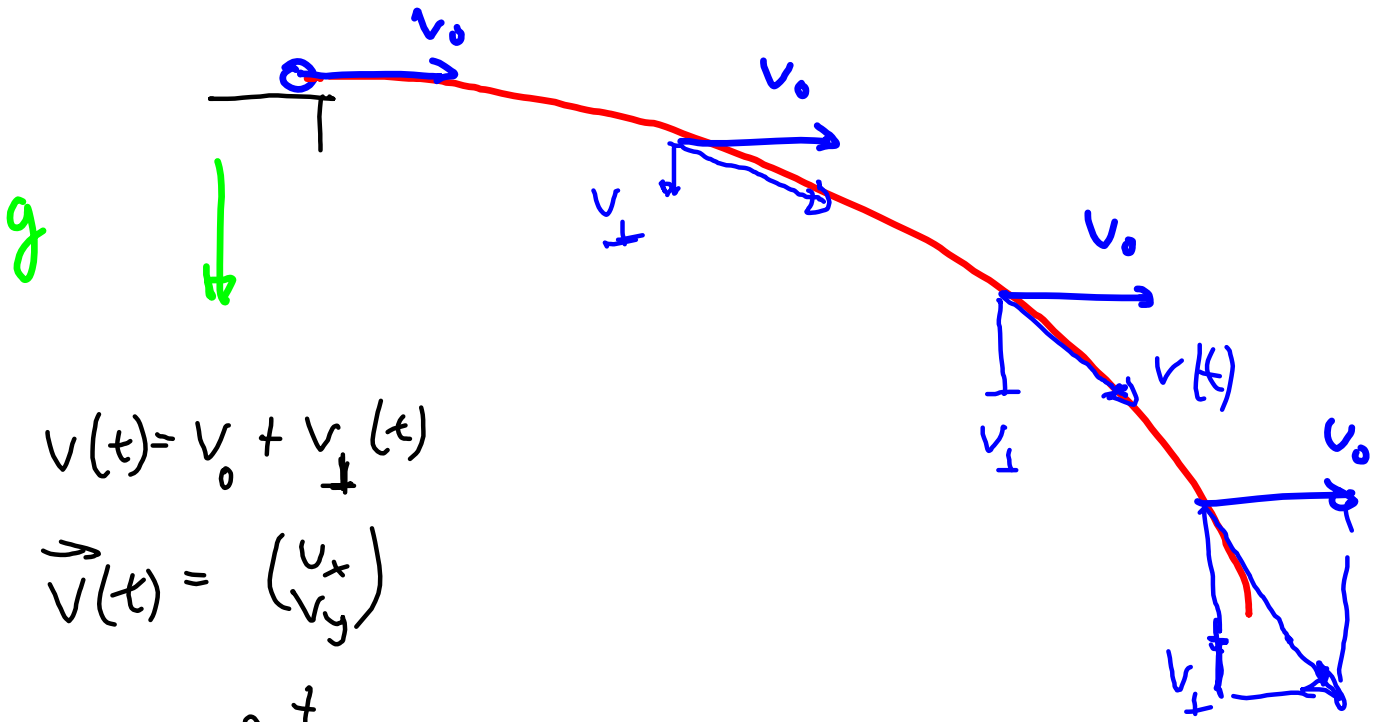
Alle Kugeln treffen gleichzeitig auf Boden

A fällt senkrecht

B Parabelflug, bei C getroffen, dann senkrechter Fall

C fällt senkrecht bis von B getroffen, dann horizontaler Wurf (Parabel)

Horizontaler Wurf

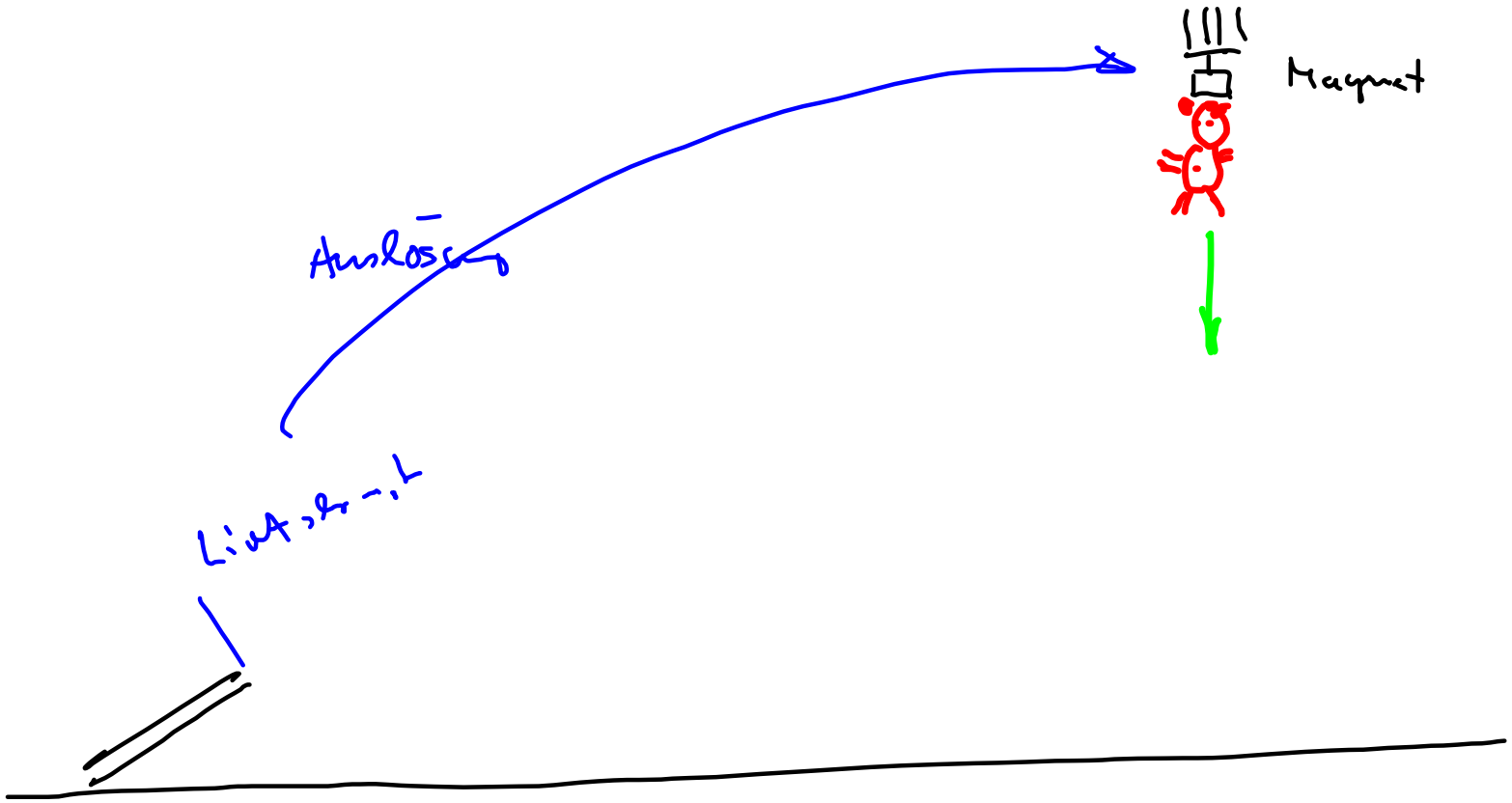


$$v(t) = v_0 + v_\perp(t)$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$v_\perp = -g \cdot t$$

Exp. Bärchenschuss

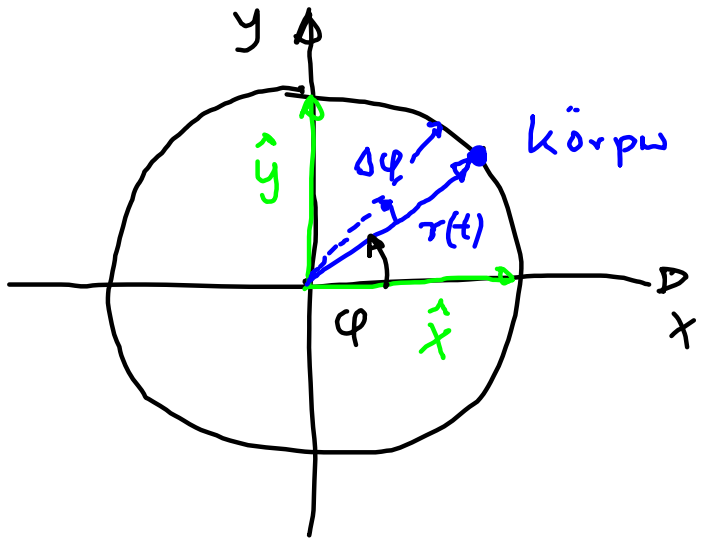


Drehbewegungen, mathematische Beschreibung

a) gleichförmige Bewegung

Ort:

$$\vec{r} = \hat{x} \cdot r_0 \cdot \cos\varphi + \hat{y}\, r_0 \cdot \sin\varphi$$



Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \nu$$

$$\varphi = \omega \cdot t$$

$\hat{x}, \hat{y}$ Einheitsvektoren

$\vec{r}$ Ortsvektor

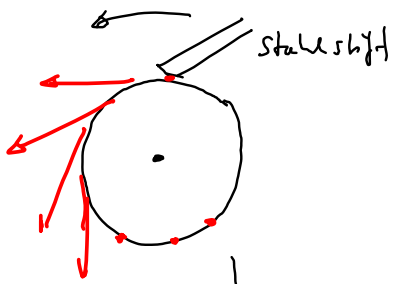
r_0 Betrag des Ortsvektors

T Umlaufdauer eines Umlaufs

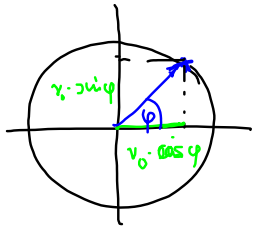
ν Frequenz = Drehzahl pro Sekunde

$\omega = 2\pi \cdot \nu$ Winkelgeschw.

Exp Schleifscheibe

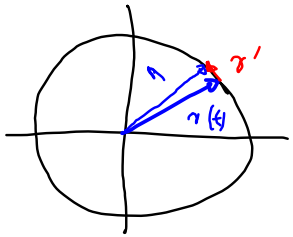


$$\vec{r}(t) = \underbrace{r_0}_{\text{Betrag}} \cdot \underbrace{(\hat{x}\cdot\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t)}_{\text{Richtung}}$$
$$= r_0 \cdot \hat{r}(t)$$



$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}\left(r_0 \cdot \hat{r}(t)\right)$$
$$= r_0 \frac{d\hat{r}(t)}{dt}$$
$$= r_0 \cdot \frac{d}{dt}\left(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t\right) = \omega \cdot r_0 \cdot \vec{r}\,'$$
$$= \underbrace{\omega \cdot r_0}_{\text{Betrag}} \cdot \underbrace{\left(-\hat{x}\sin\omega t + \hat{y}\cos\omega t\right)}_{\text{Richtung}}$$

$\hat{r}\,'$ Einheitsvektor gibt Richtung von $\vec{v}$ an und steht $\perp$ zu $\vec{r}$

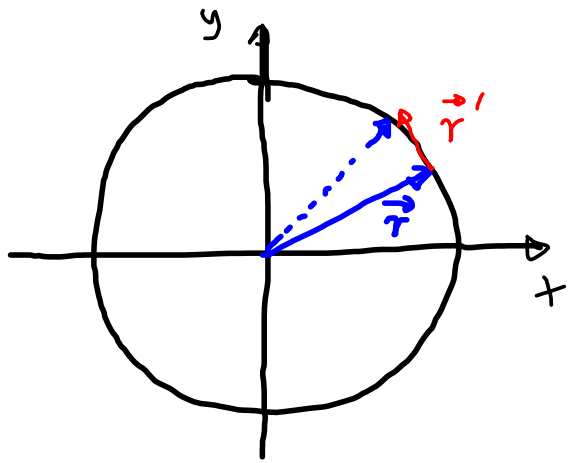


Bahngeschwindigkeit $\vec{v}$ ist immer tangential zur Bahn, aber Richtung ändert sich ständig: also muss es ständig eine Beschleunigung geben.

Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \underbrace{\omega \cdot r_0}_{\text{Betrag}} \cdot \underbrace{\left(-\hat{x}\sin\omega t + \hat{y}\cos\omega t\right)}_{\text{Richtung}}$$

$$= \underbrace{\omega \cdot r_0}_{\text{Betrag}} \cdot \underbrace{\vec{r}\,'}_{\text{Richtung}}$$



Bahngeschwindigkeit $\vec{v}$ ist immer tangential zur Bahn, aber Richtung ändert sich ständig.

→ es muss eine Beschleunigung vorliegen!!!

Beschleunigung?

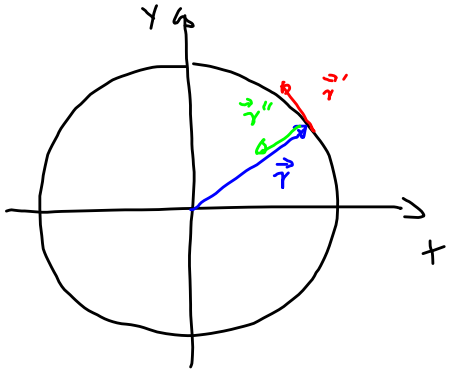
$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \underbrace{\omega^2 \cdot r_0}_{\text{Betrag}} \cdot \underbrace{\left(-\hat{x}\cos\omega t - \hat{y}\sin\omega t\right)}_{\text{Richtung}}$$

↓

$\hat{r}\,''$ = Einheitsvektor der Beschleunigung

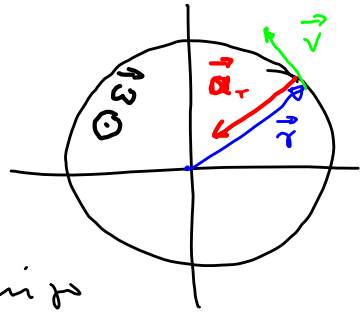
$$\boxed{\vec{a}(t) = \omega^2 \left(r_0 \vec{r}\,''\right) = -\omega^2 \vec{r}}$$

Fazit: Bei gleichförmiger Bewegung ist $\vec{a}(t)$ stets dem Radiusvektor $\vec{r}$ entgegengesetzt gerichtet, zeigt also immer zum Zentrum.



→ Zentripetalbeschleunigung

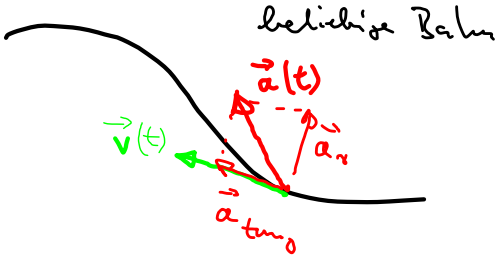
$$\boxed{\vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v}}$$

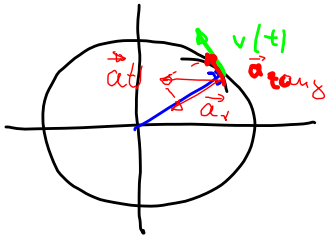


Beschleunigung bei ungleichförmiger Bewegung

$$\boxed{\vec{a}(t) = \vec{a}_{tang} + \vec{a}_r}$$

→ im allgemeinen: $\vec{a}(t)$ <u>nicht</u> $\parallel$ zu $\vec{v}(t)$





Formeltabelle Translation $\leftrightarrow$ Rotation

Translation	Rotation
s $v = \dot{s}$ $a = \ddot{s} = \dot{v}$	φ $\omega = \dot{\varphi}$ $\alpha = \ddot{\varphi} = \dot{\omega}$
Gleichförmige Bewegung $v = \text{const}$ $s = v \cdot t$	$\omega = \text{const}$ $\varphi = \omega \cdot t$ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ $\vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$
gleichmäßig beschleunigte Bewegung $a = \text{const} = a_0$ $v = v_0 + a_0 t$ $s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a_0 t^2$	$\alpha = \text{const} = \alpha_0$ $\omega = \omega_0 + \alpha_0 t$ $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_0 t^2$

2. Dynamik: Grundgesetze der klassischen Mechanik

2.1 Konzept d. klassischen Dynamik

- Körper besteht aus Masse $\underline{m}$ und Volumen $\underline{V}$

Dichte $\rho = \frac{m}{V}$ Einheit $\frac{kg}{m^3}$ (auch g/cm^3)

Idealisiert: Masse als Massenpunkt (Vorteil: keine Rotation!)

- Einwirkung auf Körper $\Rightarrow$ Kraft F
- Körper bringt der Kraft einen Widerstand entgegen: <u>Trägheit</u>

2.2. Newton'schen Axiome

① Axiom: Trägheitsgesetz

Jeder Körper verharrt im Zustand seiner Bewegung, solange er <u>nicht</u> durch Einwirkung von außen gezwungen wird, ihn zu ändern:

$$\boxed{\vec{v} = \text{const.}}, \text{ wenn } \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_a = 0$$

nur gültig in <u>Inertialsystemen</u>

② Axiom: Aktionsgesetz

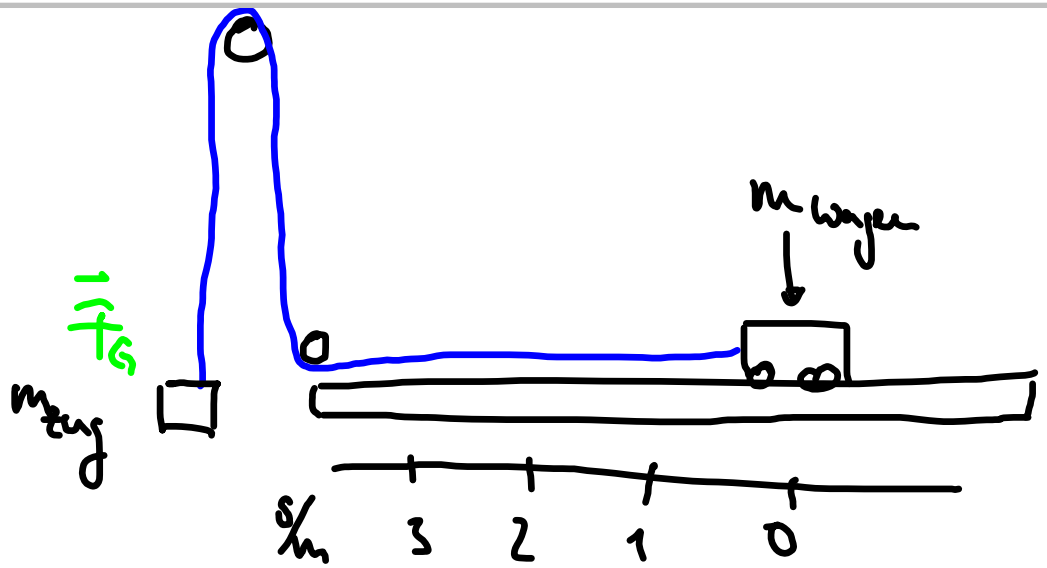
Die zeitliche Änderung der Bewegungsgröße (Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$) eines Körpers ist gleich der resultierenden Kraft $\vec{F}_a$

<u>allgemein</u>: $\vec{F}_a = \frac{d}{dt}\underbrace{(m \cdot \vec{v})}_{\text{Impuls}}$

speziell: $m = \text{const.}$

$$\underline{\vec{F}_a} = m \cdot \frac{d}{dt}\vec{v} = \underline{m \cdot \vec{a}}$$

dynamisches Grundgesetz



m_{Wagen}	m_{Zug}	m_{Ges}
5460g	150g	5610g
2505g + 150g	150g	2805g
2505g	300g	2805g

Teilexperimente

a) doppelte Masse, einfache Kraft

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ $\quad a_{①} \sim \frac{F}{2m}$ $\quad a_1 = \frac{m_{Zy} \cdot g}{m_{ges}} = 0{,}26 \frac{m}{s^2}$

b) einfache Masse, einfache Kraft

$a_{②} \sim \frac{F}{1 \cdot m}$ $\quad a_2 = \frac{m_{Zy} \cdot g}{m_{ges}} = 0{,}52 \frac{m}{s^2}$

c) einfache Masse, doppelte Kraft

$a_{③} \sim \frac{2F}{m}$ $\quad a_3 = 4a_1 = 1{,}04 \frac{m}{s^2}$

2. Dynamik

2.1. Konzepte der klass. Mech.

2.2. Newton'schen Axiome

1) Trägheitsgesetz: wenn $\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{p} = m \cdot \vec{v} = \text{const}$

2) Aktionsgesetz: $\vec{F} \neq 0$: $\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \dot{\vec{p}}$

spezielle $m = \text{const}$: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

3) Wechselwirkungsgesetz

actio = reactio

Es gibt keine einzelne isolierte Kraft:
Zu jeder Kraft gibt es eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{F}'}$$

2.3. Masse

2 Eigenschaften

a) träge Masse
b) schwere Masse

} nach Einstein: $m_{träge} \equiv m_{schwer}$

Einheit kg (Urkilogramm in Paris)

2.4. Kräfte

Kraft ist ein Vektor $\vec{F}$ (Betrag <u>und</u> Richtung)

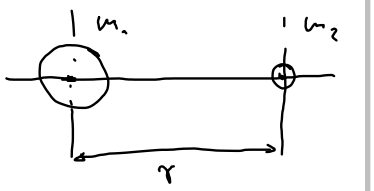
Einheit $1\,N = \frac{1\,kg \cdot 1\,m}{1\,s^2}$ $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

- Kraft, allgemein

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

- Gravitationskraft

$$\boxed{F_g = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$$



γ Gravitationskonstante

m_1, m_2 Massen

r Abstand der Schwerpunkte

auf Erdoberfläche $\gamma \cdot \frac{m_{Erde}}{r_{Erde}^2} = \vec{g} \quad \frac{m}{s^2}$

→ Schwerkraft im "Labor":

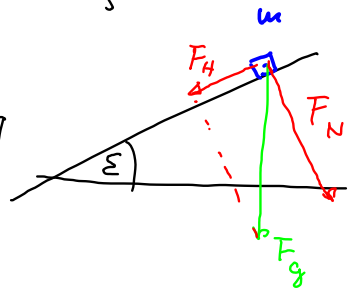
$$\boxed{F_g = m \cdot g} \qquad g = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

- Hangabtriebskraft

$$\boxed{F_H = m \cdot g \cdot \sin \varepsilon}$$

- Normalkraft

$$\boxed{F_N = m \cdot g \cdot \cos \varepsilon}$$



- Reibungskraft (Festkörperreibung)

$$\boxed{F_R = \mu F_N}$$

μ Reibungskoeffizient

μ_H Haftreibung

μ_{gl} Gleitreibung

μ_R Rollreibung

$$1 > \mu_H > \mu_{gl} > \mu_R > 0$$

Reibungskraft

$$\boxed{F_R = \mu F_N}$$

F_N = Normalkraft

μ = Reibungskoeffizient

$$1 > \mu_H > \mu_{gl} > \mu_R > 0$$

Haften Gleiten Rollen

gilt für ein bestimmtes Material

Beispiele: Gummi / Asphalt $\mu_H \approx 0{,}9$

$\mu_{gl} \approx 0{,}85$

$\mu_R \approx 0{,}025$

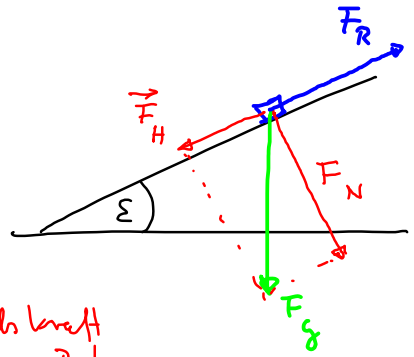
Stahl / Eis $\mu_H \approx 0{,}03$

$\mu_{gl} \approx 0{,}015$

Exp. Wärmebildkamera

→ Erwärmung durch Reibung

Körper auf schiefer Ebene



$\vec{F}_H$ = Hangabtriebskraft parallel zur Bahn

$\vec{F}_N$ = Normalkraft ⊥ zur Bahn

$F_H = F_g \cdot \sin \varepsilon$

$F_N = F_g \cdot \cos \varepsilon$

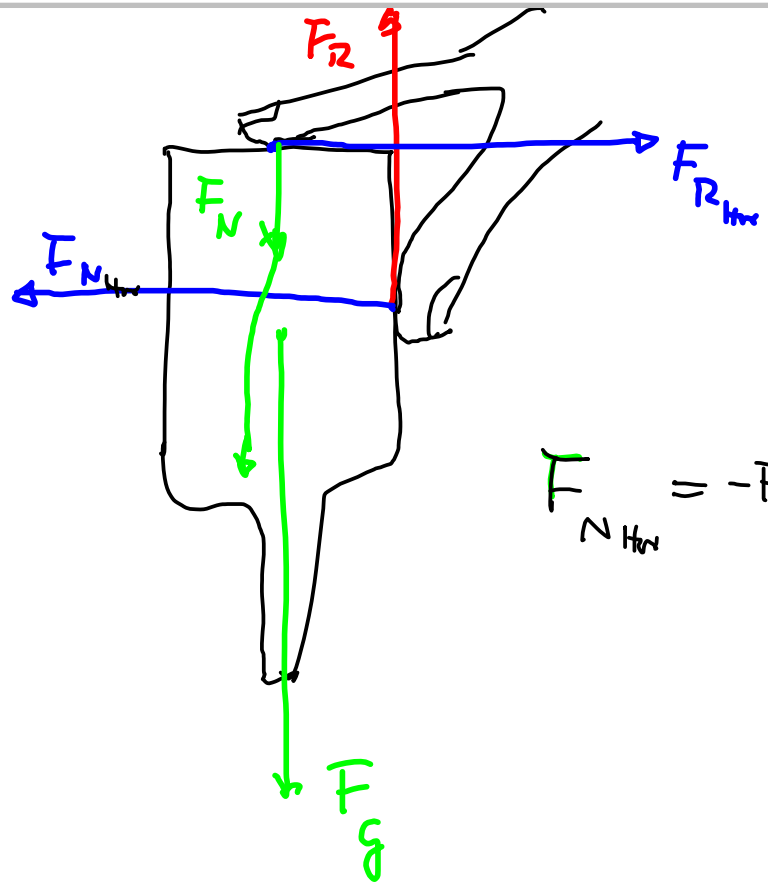
Reibungskraft F_R ist stets entgegen der Bewegungsrichtung gerichtet

Hinweis für Aufgaben: Bedingung für Haften $F_R \geq F_H$

Exp: Verschiedene Körper auf schiefer Ebene

Winkel ε	F_N	F_H
0	$F_g = 1$	0
10	0,94	0,17
20	0,87	0,34
30	0,71	0,5

Exp: "Flasche"



$$F_{N_{Hw}} = -F_{R_{Hw}}$$

Zentripetalkraft

$$\boxed{\vec{F}_{zp} = -m \cdot \vec{r} \cdot \omega^2 = -m \cdot \frac{v^2}{\vec{r}}}$$

Zentrifugalkraft: $\vec{F}_{zf} = -\vec{F}_{zp}$

- Zentripetalkraft (Zentrifugalkraft)

$$\boxed{\vec{F}_{zp} = -m \cdot \vec{r} \cdot \omega^2 = -m \cdot \frac{v^2}{\vec{r}}}$$

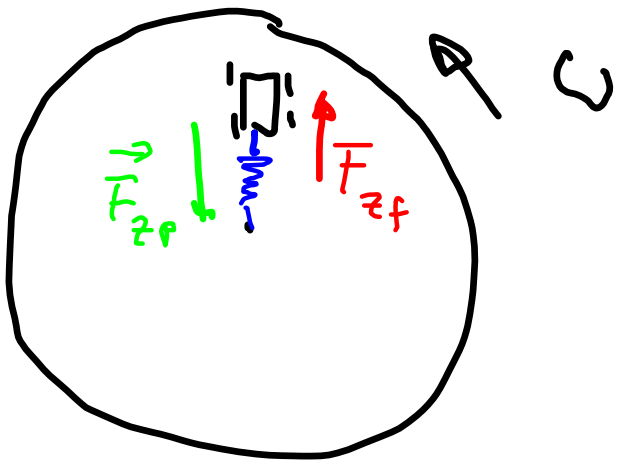
zum Zentrum gerichtet

im rotierenden System:

$$\vec{F}_{zf} = m \cdot \vec{r}\,\omega^2 = m \cdot \frac{v^2}{\vec{r}}$$

vom Zentrum weg gerichtet

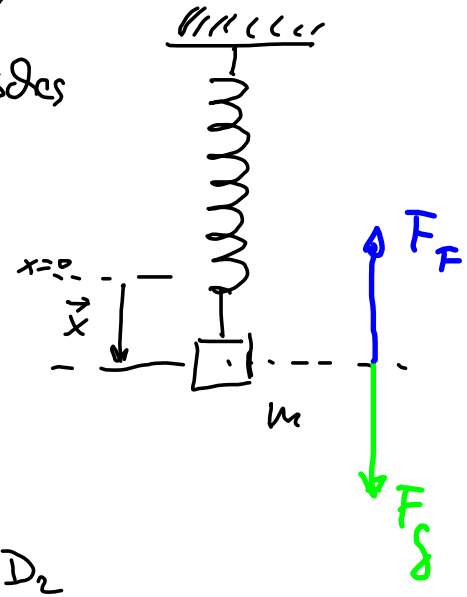
Exp. Wagen auf Drehscheibe



- Federkraft (elastische Kraft)

$$\boxed{\vec{F}_F = -D\vec{x}}$$

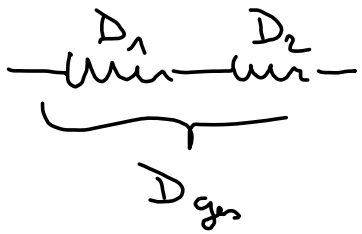
Hook'sches Gesetz



x Auslenkung
D Federkonstante (elastische Konst.)

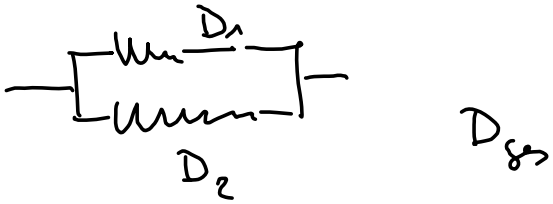
Kopplung von Federn:

a) Serie



D_{ges}: $\frac{1}{D_{ges}} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}$

b) Parallel



D_{ges}: $D_{ges} = D_1 + D_2$

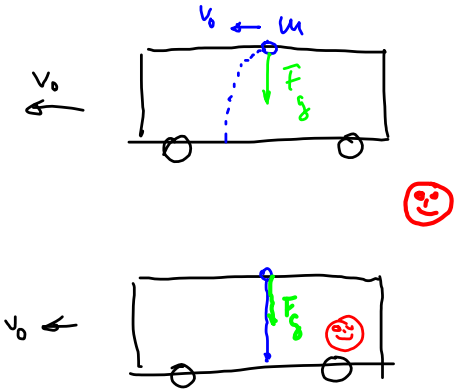
Federenergie $\boxed{E_F = \frac{1}{2} D x^2}$

- Trägheitskraft (d'Alembert'sches Prinzip)

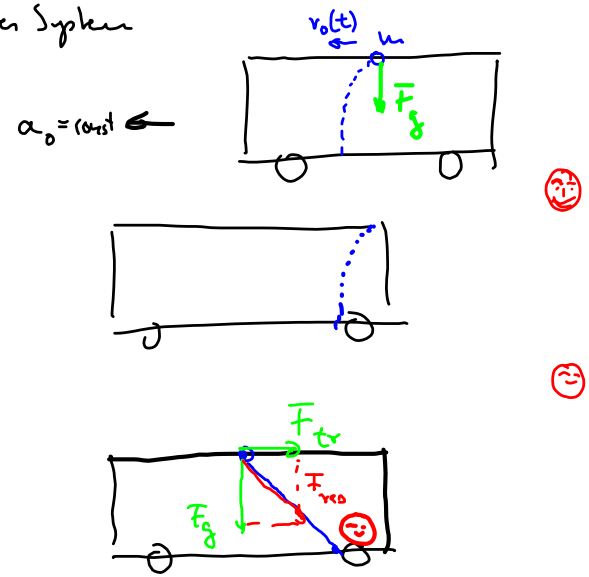
  tritt auf in <u>beschleunigten</u> Bezugssystemen

Beispiel: Bahn

a) Inertialsystem



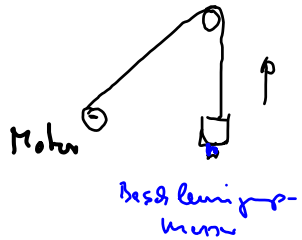
b) beschleunigtes System

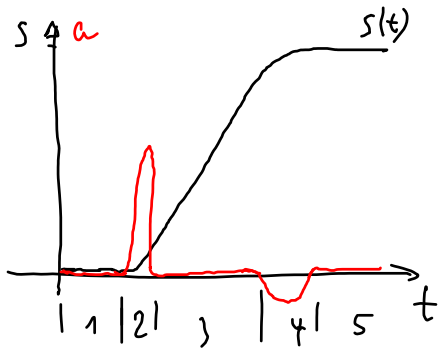


$$\boxed{\vec{F}_{tr} = -m \cdot \vec{a}}$$

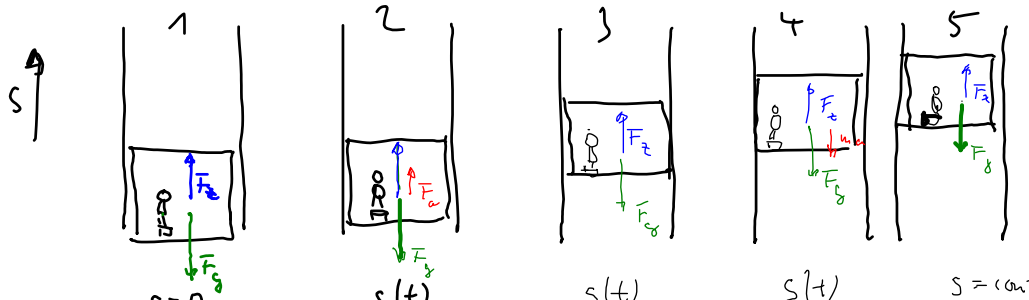
$\vec{a}$ Beschleunigung des Systems

Exp: Personenaufzug



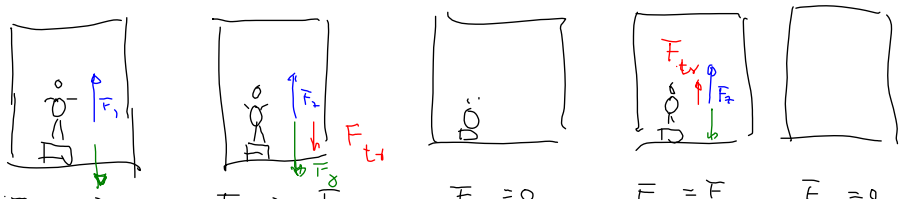


a) Beobachtung vom ruhenden System



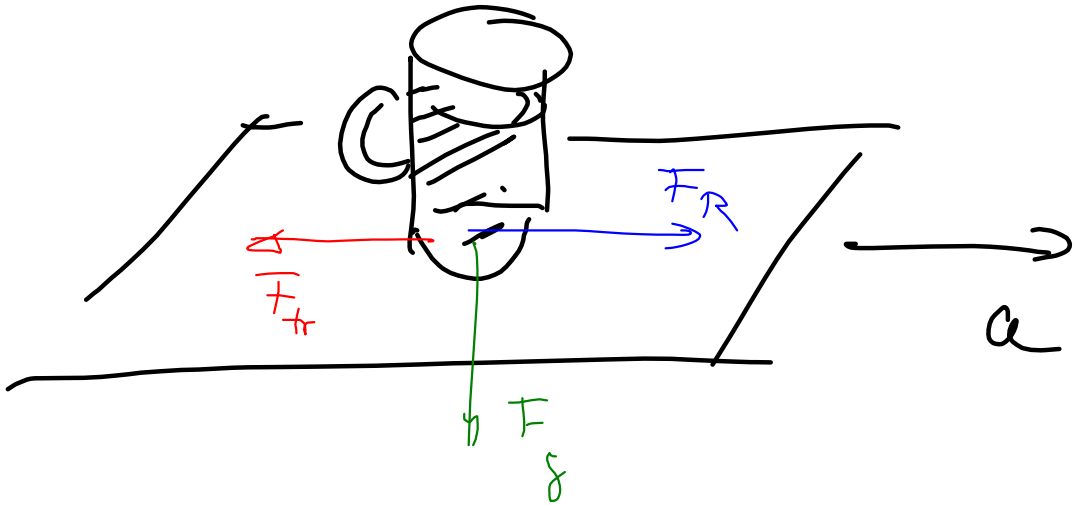
1	2	3	4	5
$s = 0$	$s(t)$	$s(t)$	$s(t)$	$s = \text{const}$
$v = 0$	$v(t)$	$v = v_0$	$v(t)$	$v = 0$
$a = 0$	$a(t)$	$a = 0$	$a(t)$	$a = 0$
$F_{ges} = F_g + F_z = 0$	$F_{ges} = F_g + F_z + m \cdot a$	$F_{ges} = F_g + F_z$	$F_{ges} = F_g + F_z - m \cdot a$	$F_{ges} = F_g + F_z$
$F_g = -F_z$	$F_{ges} = m \cdot a$	$F_g = -F_z$	$F_{ges} = -m \cdot a$	$F_g = -F_z$

b) im beschleunigten System



$F_{ges} = 0$	$F_{ges} = -F_{tr}$	$F_{ges} = 0$	$F_{ges} = F_{tr}$	$F_{ges} = 0$

Exp.



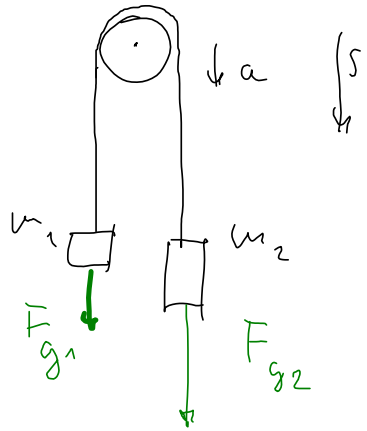
"stehen"

$$F_{tr} \gg F_R$$

$$-\cancel{m} \cdot a \gtrsim \mu \cancel{m} \cdot g$$

$$\frac{a}{g} \gg \mu$$

Exp. Umlenkrollen



a) Beobachtung von außen

$$F_{ges} = F_{g2} - F_{g1} = m \cdot a$$

$$F_{ges} = m_2 g - m_1 g = m_{ges} \cdot a$$

System bewegt sich mit Beschl. a

b) Beobachtung im System
(Beobachter in Ruhe)

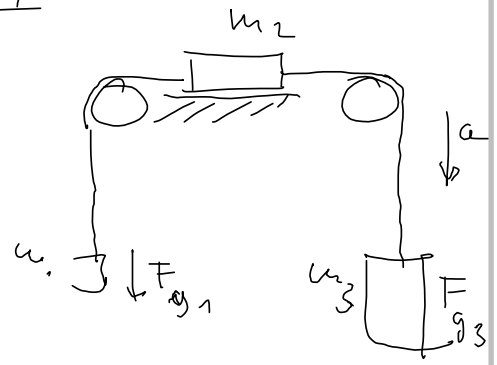
$$\sum_{i=1}^{n} F_i = 0 = F_{g1} + F_{g2} + F_{tr1} + F_{tr2}$$

$$0 = -m_1 g + m_2 g - m_1 a - m_2 a$$

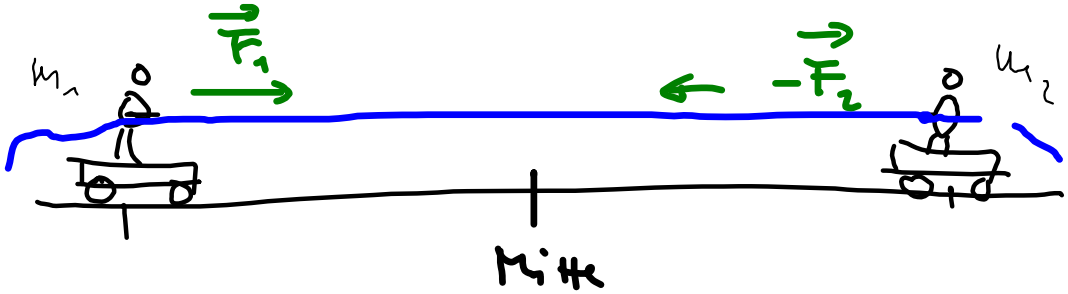
$$\boxed{a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g}$$

Erweiterung:

$$\boxed{a = \frac{m_3 - m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot g}$$



Exp. zum 3. Newton'schen Axiom (actio = reactio)

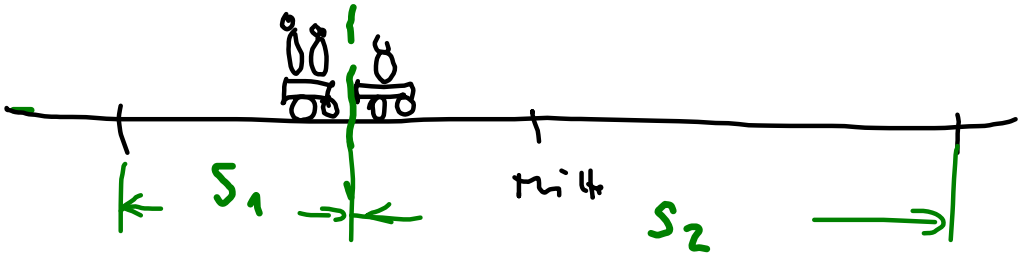


$$\boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2}$$

nun Beschleunigung:

$$m_1 \cdot a_1 = m_2 \cdot a_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} =$$



da $s = \frac{1}{2} a t^2$:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{2 s_2 \cdot t^2}{2 s_1 \cdot t^2} = \frac{s_2}{s_1}$$

Masse Wagen (leer) $\approx 40\,kg$

Person $\approx 75\,kg$

5. Impuls

Definition: $\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$ Einheit $\frac{kg \cdot m}{s} = Ns$

Newton: "Bewegungsgröße"

"Änderung des Impulses erfolgt durch Kraft:

Impulssatz

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \dot{\vec{p}}}$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt}\vec{p}$$

Greift eine äußere Kraft $\vec{F}$ an einem Körper (System von Körpern) an, so ändert sich dessen Impuls $\vec{p}$.

Beispiel für Änderung des Impulses:

$\boxed{\text{Kraftstoß}}$

zeitlich begrenzte Einwirkung einer Kraft

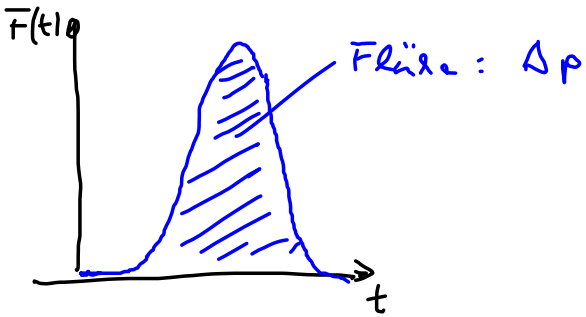
z.B. Auto von $100\,\frac{km}{h} \longrightarrow 120\,\frac{km}{h}$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\,p$$

$$F\,dt = dp$$

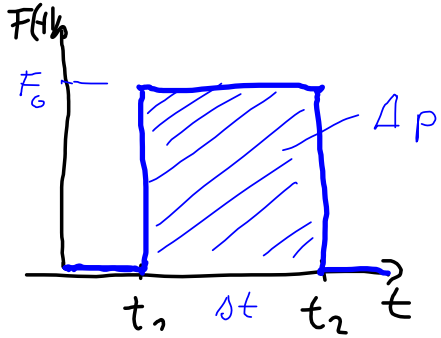
$$\int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt = p_2 - p_1 = \Delta p = m \cdot \Delta v$$

allgemein:

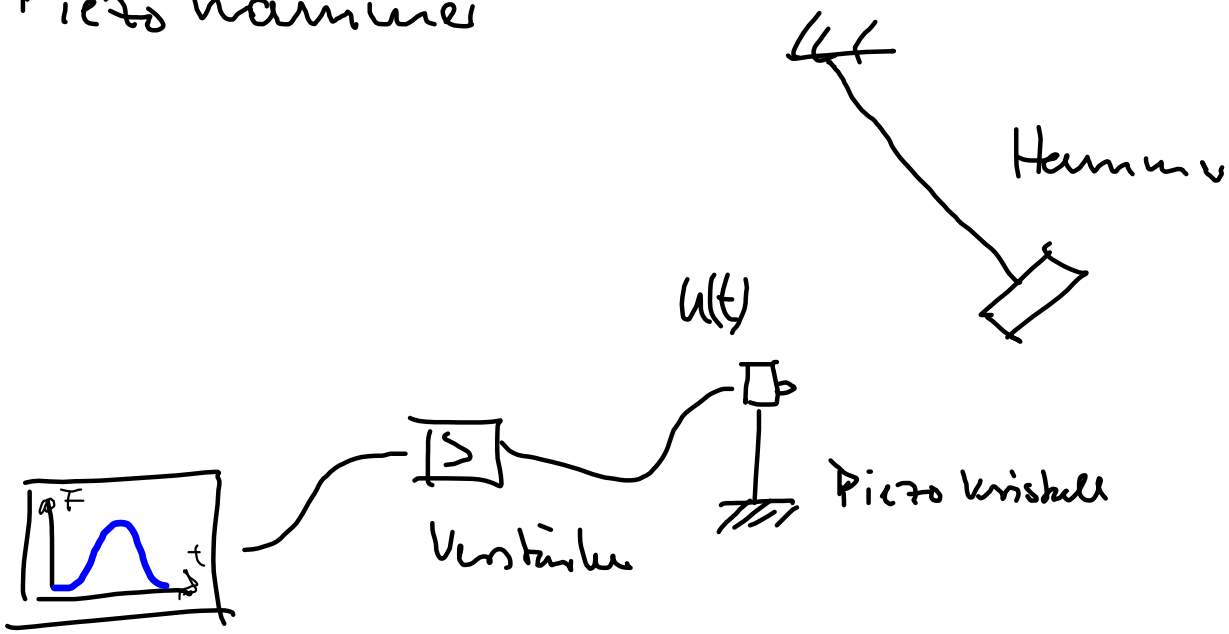


speziell:

$F_0 = \text{const}$



Exp. Piezohammer



<u>Fazit:</u> Impuls eines Systems wird durch äußere Kräfte geändert, <u>nicht</u> durch innere Kräfte.

Wenn keine äußeren Kräfte auf einen Körper einwirken, bleibt der Impuls erhalten

Impulserhaltungssatz IES

$$\sum \vec{F}_a = 0 \longrightarrow \boxed{\vec{p} = \text{const}}$$

Für ein System von Körpern gilt sinngemäß:

$$\vec{P}_{ges} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 \ldots\ldots = \text{const}$$

$$\vec{P}_{ges} = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + m_3 \cdot \vec{v}_3 \ldots\ldots = \text{const}$$

Dabei kann es innerhalb des Systems zu Austauschprozessen kommen: z.B. Zusammenstöße im Gas

$$\boxed{\vec{P}_{ges\ vor} = \vec{P}_{ges\ nach}}$$ IES für ein System

Beispiele:
- Elementarteilchenphysik
- Explosion
- Gaskinetik

Exp. Fahrbahn

a) 2 Körper IES $\vec{p}_{ges\ vor} = \vec{p}_{ges\ nach}$

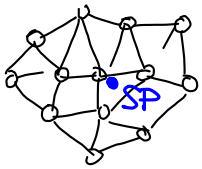
b)

c) $m_1 \neq m_2$: $m_1 = 2m$

Ergebnis : - Impuls wird nur teilweise übertragen
- Gesamtimpuls bleibt konst.

Schwerpunkt

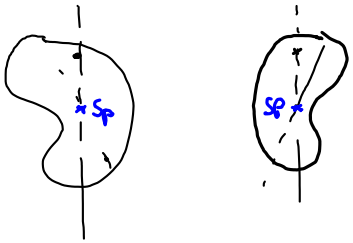
System von Teilchen



1) Der Gesamtimpuls eines Systems von Körpern verhält sich so, wie wenn die gesamte Masse des Systems im Schwerpunkt vereinigt wäre und sich mit der Geschwindigkeit des Schwerpunktes bewegen würde.

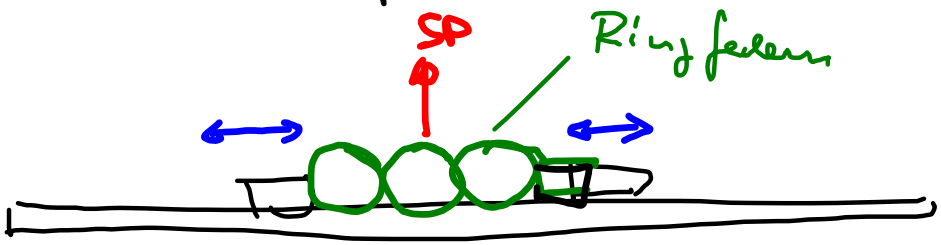
2) Der Massenmittelpunkt eines Systems bewegt sich so, wie wenn in ihm die gesamte Masse vereinigt wäre und die äußeren Kräfte an ihm angreifen würden.

Exp Ermittlung des Schwerpunktes



Exp: Kombination von Schwerpunktsatz und IES

$\vec{F}_a = 0 \longrightarrow \vec{p} = \text{const} \qquad \vec{v}_{SP} = \text{const}$



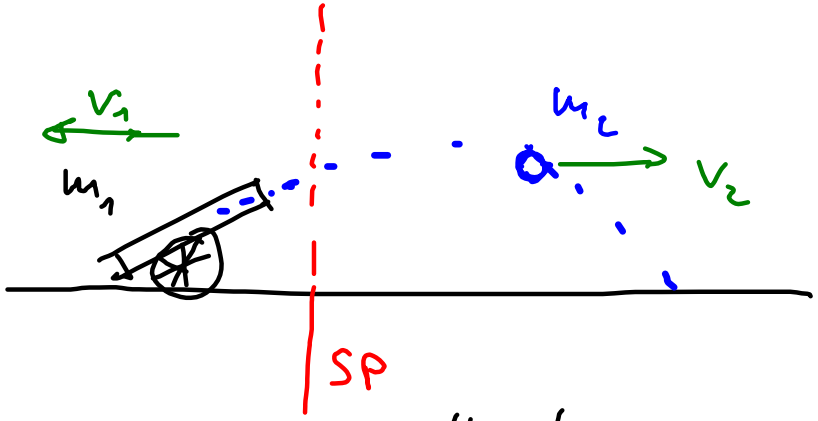
Kombination von Schwerpunktsatz und Imp.Erh.satz

$$\vec{F}_a = 0 \rightarrow \vec{p}_{ges} = \text{const} \rightarrow \vec{v}_{SP} = \text{const.}$$

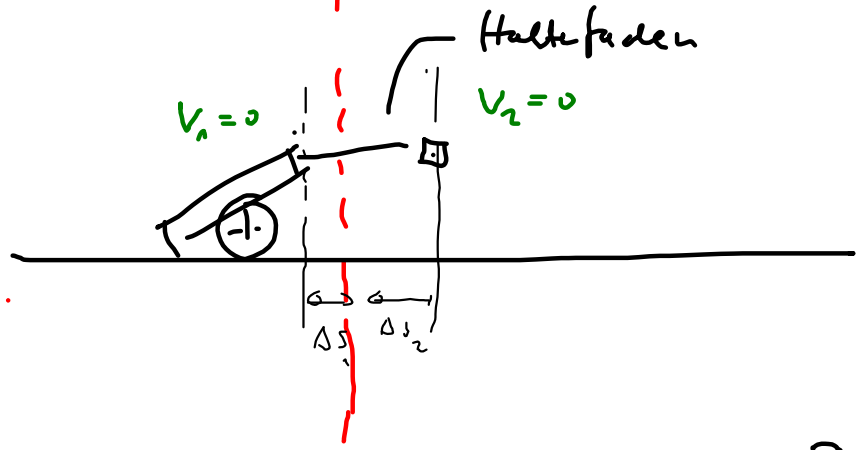
Exp: Kanone

a) $p_1 = -p_2$

$m_1 \cdot v_1 = -m_2 \cdot v_2$



b)



Ergebnis: In jedem Fall bleibt der Schwerpunkt des System in Ruhe

Antrieb der Rakete

$$F_R = m_R \cdot a_R = F_g + F_{Schub}$$

$$\boxed{\vec{F}_{Schub} = \dot{m} \cdot \vec{v}_{rel}}$$

$\dot{m} = \frac{d}{dt} m$ Massefluss

$\vec{v}_{rel}$ = relative Geschw. der ausstoßenden Masse zur Rakete

eingesetzt $\quad m_R(t) \cdot a_R = -m_R(t) \cdot g + \dot{m} \cdot v_{rel}$

$$\boxed{a_R = -g + \frac{\dot{m}}{m_0 - \dot{m} \cdot t} \cdot v_{rel}}$$

m_0 = Startmasse der Rakete

Endgeschwindigkeit bei Brennschluss:

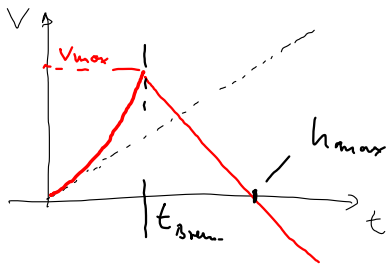
$$\boxed{v_{end} = v_{rel} \cdot \ln\left(\frac{m_T + m_{R\,leer}}{m_{R\,leer}}\right)}$$

m_T = Masse des ausgestoßenen Treibstoffs

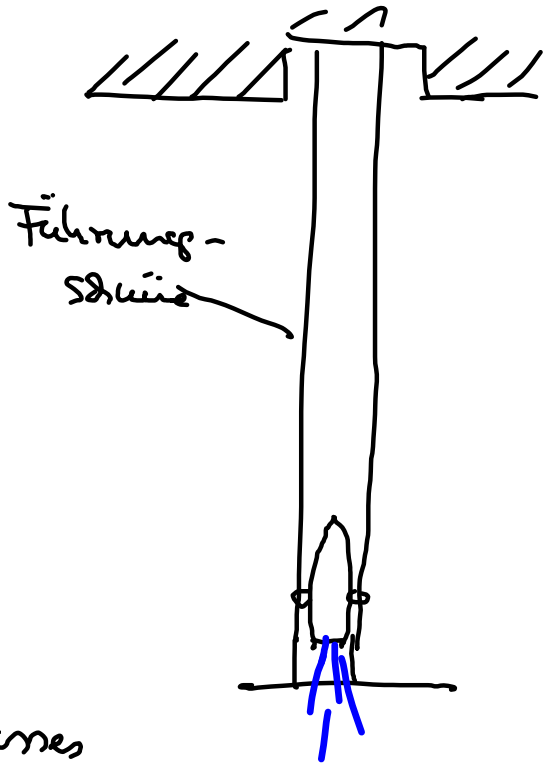
bei senkrechtem Flug im Schwerefeld muss noch die Schwerkraft berücksichtigen

zusätzlich: $\quad - m_{R\,leer} \cdot g(R_{Erde}, t)$

da $F = \text{const}$ und m weniger wird, wächst a



Exp. Kleine Rakete



a) nur Pressluft

$h_{max} \approx 1\,m$

d.h. v_0 (Brennschluss) $\approx 4{,}5\,\frac{m}{s}$

b) Pressluft + Alustab

→ Erhöhung des Massenflusses

$h_{max} \approx 3\,m$

c) Pressluft + Wasser ($\frac{1}{3}$ Volumen)

Hinweise zum Thema Rakete:

- Geostationäre Satelliten:

Bedingung $\boxed{\vec{F}_{zf} = -\vec{F}_g}$

Erdradius 6380 km

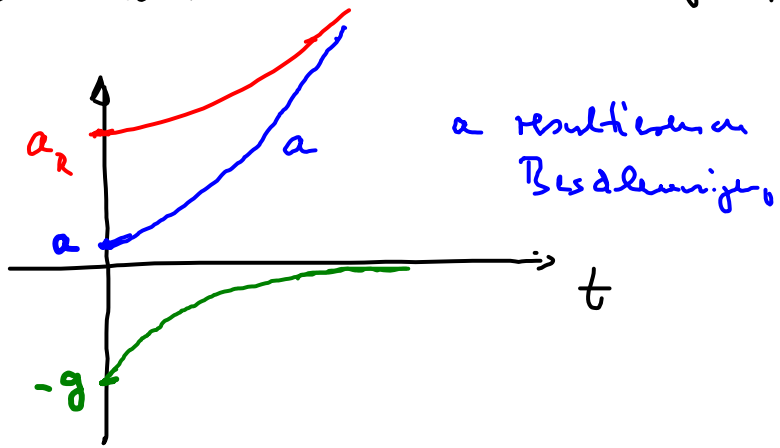
Bahnabstand zur Erdoberfläche:

35.800 km

F_g in dieser Höhe ca. 2,3 % von g_{Erde}

- Fluchtgeschwindigkeit $11{,}2\ \frac{km}{s}$

- Beschleunigungen beim Raketenstart ⊥ zur Erdoberfläche:



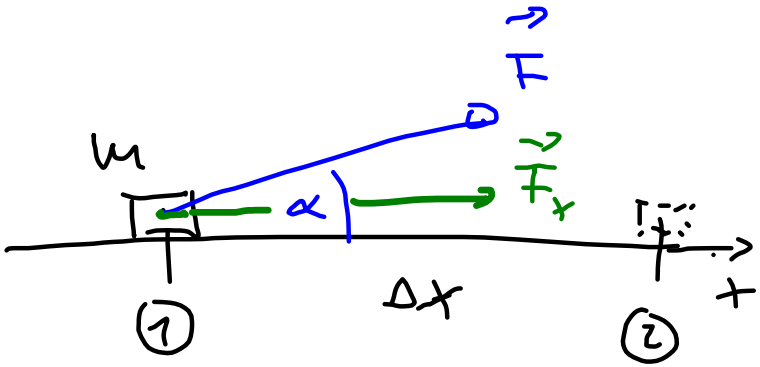
6) Arbeit, Leistung, Energie

6.1 Arbeit

Kraft · Weg = Arbeit

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{x} = \vec{F}_x \cdot \vec{x} = |\vec{F}| \cdot \cos\alpha \cdot |\vec{x}|}$$

$$W = \int_1^2 dW = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}(t)\, dx$$

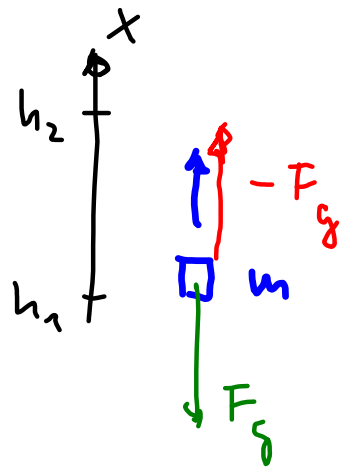


Speziell: $F = \text{const}$, μ Reibung

$$W_{12} = F \int_{x_1}^{x_2} dx = F_N \cdot \mu \, (x_2 - x_1)$$

Kiste auf horizontaler Bahn mit konst. Reibung

a) Hubarbeit



$$W_{Hub} = \int_{h_1}^{h_2} F \, dx$$

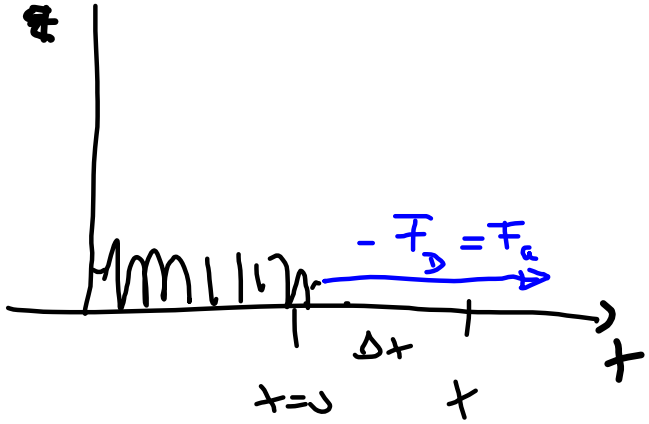
$$= \int_{h_1}^{h_2} m \cdot g \, dx = m \cdot g \left(h_2 - h_1 \right)$$

wenn $h_1 = 0$ & $h_2 = h$

$$\boxed{W_{Hub} = m \cdot g \cdot h}$$

b. Spannarbeit

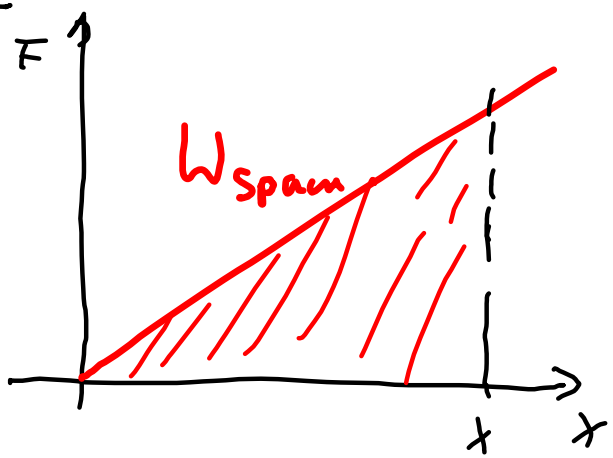
Hook'sches Gesetz $F_D = -D \cdot x$



$$W_{Spann} = \int_0^x F_a \cdot dx$$

$$W_{Spann} = \int_0^x D \cdot x \, dx = \frac{1}{2} D x^2$$

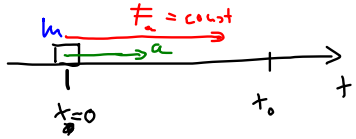
$$\boxed{W_{Spann} = \frac{1}{2} D x^2}$$



C. Beschleunigungsarbeit

Körper wird mit F_a beschleunigt

$\vec{F}_a = m \cdot \vec{a} = \text{const}$



eindimensional

$$W_B = \int \vec{F} d\vec{x} = \int F dx$$

$$= \int_0^{x_0} m \cdot a \cdot dx = m \cdot a \cdot x_0$$

da a = const : $\rightarrow x = \frac{1}{2} a t^2$
$\rightarrow v = a \cdot t$ } Kinematik

aufgelöst und gleich gesetzt:

$$\sqrt{\frac{2x}{a}} = \frac{v}{a}$$

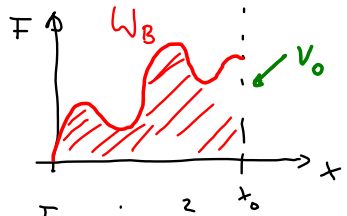
quadrieren:

am Ort x_0: $x_0 = \frac{v_0^2}{2a}$

eingesetzt: $$\boxed{W_B = m \cdot \cancel{a} \cdot \frac{v_0^2}{2\cancel{a}} = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2}$$

v_0 Geschwindigkeit am Ort x_0

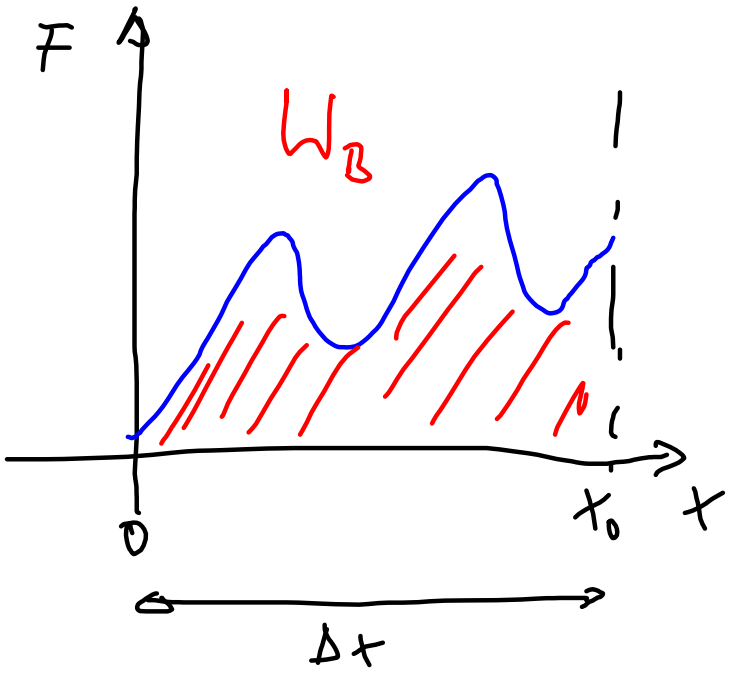
Hinweis: W_B hängt nur von Masse und Endgeschwindigkeit, nicht von der Beschleunigung selbst



Hinweis: Auto: Energie $\sim v^2$

Beschleunigungsarbeit

$$W_B = \int_{x=0}^{x_0} F(x)\,dx = \frac{1}{2} m v_0^2$$



6.2 Leistung

$$\text{Leistung} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}}$$

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \dot{W} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}} \qquad 1\,\frac{Nm}{s} = 1\,\text{Watt}$$

6.3. Energie

Def: Energie ist die Fähigkeit eines Systems, Arbeit zu verrichten.

a) Lageenergie (potentielle Energie)

$$\boxed{E_{pot} = m \cdot g \cdot h}$$ Einheit $J = N \cdot m$

b) Spannenergie

$$\boxed{E_D = \frac{1}{2} D x^2}$$ $J = N \cdot m$

D = elast. Konstante
x = Auslenkung

c) Kinetische Energie

$$\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2}$$ $J = N m$

Zusammenfassung der drei mechanischen Energien:

$$\boxed{W = \Delta E_{ges} = \Delta E_{pot} + \Delta E_D + \Delta E_{kin}}$$

Energiesatz der Mechanik

Wenn an einem System Arbeit verrichtet, erhöht sich dessen Vorrat an Energie

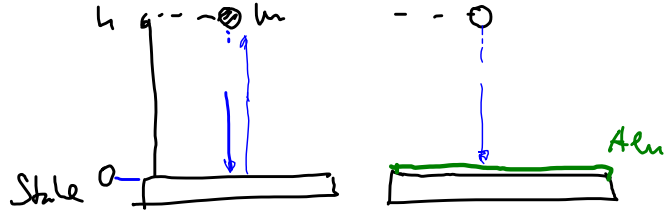
Zufuhr von Arbeit $\Delta W > 0$

Abgabe von Arbeit $\Delta W < 0$

Wenn $\Delta E = 0$ ist, dann haben wir den Energieerhaltungssatz (EES)

$$\boxed{E_{ges} = E_{pot} + E_D + E_{kin} = \text{const}}$$

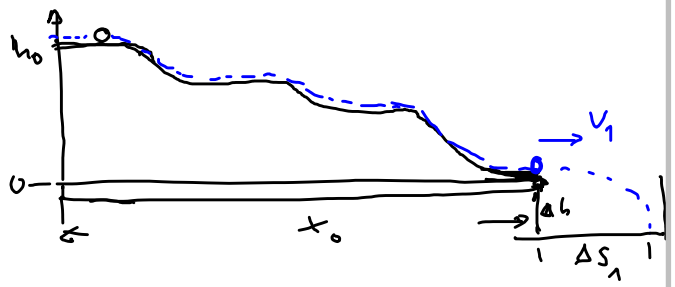
Exp. Kugelfall versus



Exp Kugelbahn

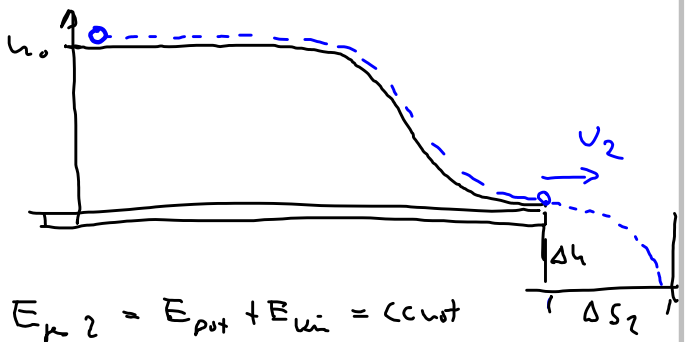
$m_1 = m_2$

Bahn 1



Länge Bahn 1 > Bahn 2

$\Delta t_1 < \Delta t_2$



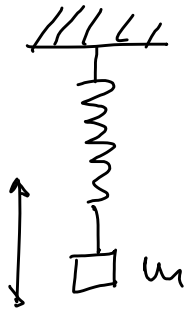
Flugweite $\Delta s_1 = \Delta s_2$

$\rightarrow v_1 = v_2$

EES : $E_{ges\,1} = E_{ges\,2} = E_{pot} + E_{kin} = \text{const}$

Exp

$E_{ges} = E_{pot} + E_D + E_{kin} = \text{const}$



7) Stopprozesse

Problem: vor

nach (')

bekannt: m_1, m_2, v_1, v_2

gesucht: v_1', v_2' (bei 2 Körpern, 2 Unbekannte)

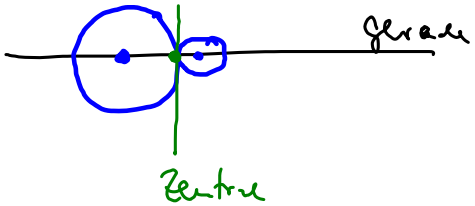
Lösung: 2 Gleichungen nötig: IES, EES

Unterscheidung: Stoß
- elastisch $E_{vor} = E_{nach}$
- inelastisch $E_{vor} > E_{nach}$
- unelastisch beide Körper bleiben nach dem Stoß vereinigt

Verschiedene Stoßformen: z.B. gerade, schief, zentral. –

hier nur gerader, zentraler Stoß

Schwerpunkte und Berührungspunkt liegen auf Gerade



7.1. Gerader, zentraler, elastischer Stoß

gesucht v_1', v_2'

Lösung: IES: $\vec{p}_{ges} = \vec{p}_{ges}'$

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$$

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \qquad (1)$$

da abgeschlossenes System (energetisch) EES: $E_{kin\,vor} = E_{kin\,n.}'$

$$E_{kin\,1} + E_{kin\,2} = E_{kin\,1}' + E_{kin\,2}'$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \qquad (2)$$

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2) \qquad (1')$$

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2) \qquad (2')$$

$$m_1 (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2 (v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \qquad (2'')$$

$(2'') : (1')$

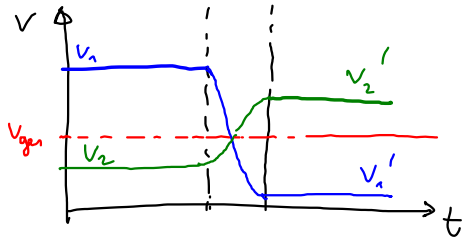
$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2$$

Ergebnis:

$$\boxed{v_1' = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}}$$

$$\boxed{v_2' = \frac{2 m_1 \cdot v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}}$$

$$v_{ges} = \frac{p_{ges}}{m_1 + m_2}$$

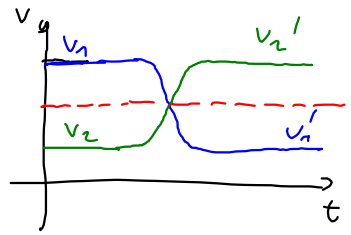


Sonderfälle: ① $m_1 = m_2 = m$

a) $v_1 > v_2$

$\rightarrow v_1' = v_2$

$v_2' = v_1$

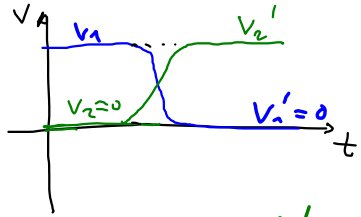


b) $m_1 = m_2 = m$

$v_2 = 0$

$v_1' = 0$

$v_2' = v_1$

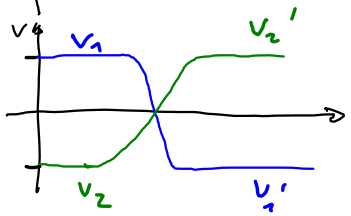


c) $m_1 = m_2 = m$

$v_1 = -v_2$

$v_1' = -v_1$

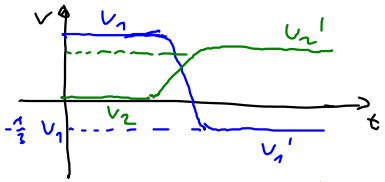
$v_2' = -v_2$



② $m_1 = \frac{1}{2} m_2$, $v_2 = 0$

$v_1' = -\frac{1}{3} v_1$

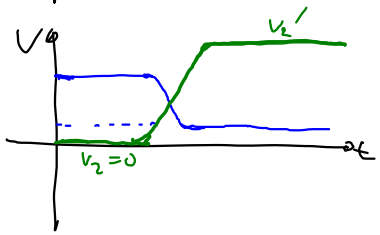
$v_2' = \frac{2}{3} v_1$



③ $m_1 = 2m_2$, $v_2 = 0$

$v_1' = \frac{1}{3} v_1$

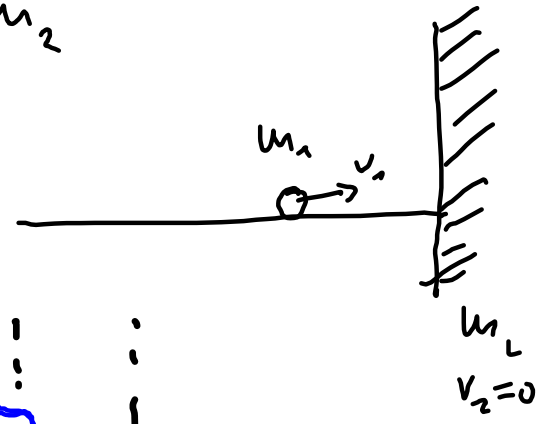
$v_2' = \frac{4}{3} v_1$



④ $m_1 <<< m_2$, $v_2 = 0$ (starre Wand)

Annahme: $m_1 + m_2 \approx m_2$

$$v_1' \simeq -v_1$$

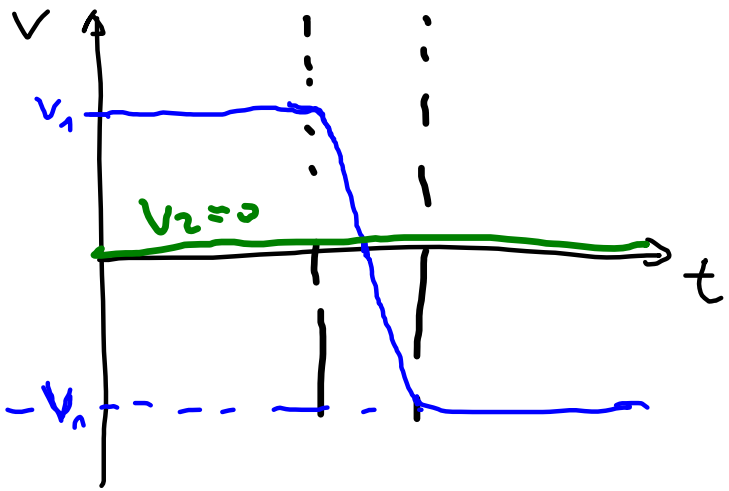


Reflexion

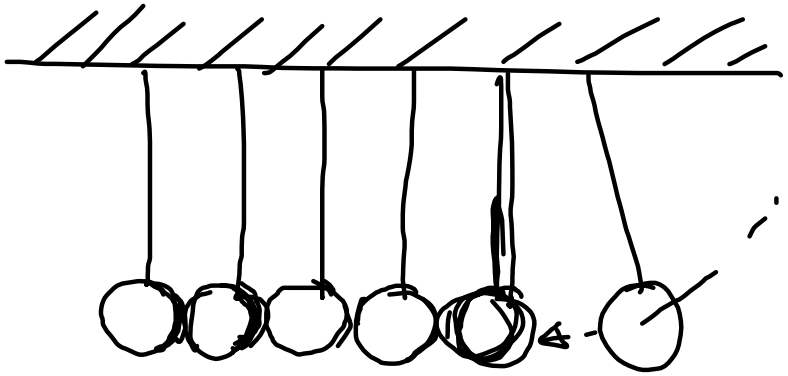
$\Rightarrow$ max. Impulsänderung

$$\Delta p = 2 \cdot |\vec{p}|$$

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$



Exp. Kugelstoßapparat



k stoßende Kugeln

l wegfliegende Kugeln

alle Kugeln haben Masse m

voll elastisch

Es gilt:

IES: $k \cdot \cancel{m} \cdot v_1 = l \cdot \cancel{m} \cdot v_2$ (1)

EES: $k \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m} v_1^2 = l \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m} v_2^2$ (2)

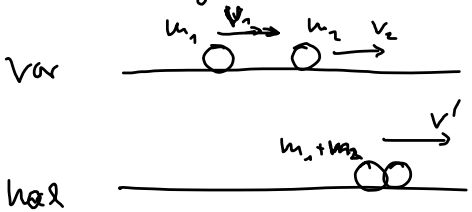
$$k^2 \cdot v_1^2 = l^2 \cdot v_2^2 \quad (1')$$

(1') : (2)

$$\underline{\underline{k = l}}$$

7.2. Gerader, zentraler, unelastischer Stoß

Körper bleiben nach dem Stoß vereinigt



Es gilt immer IES

nicht EES

gesucht v':

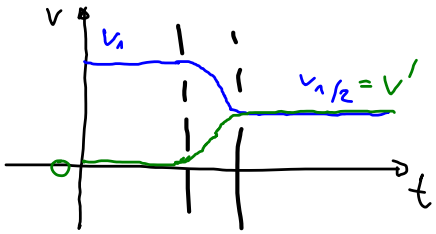
$$\vec{p}_{ges} = \vec{p}\,'_{ges}$$

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v'$$

$$\boxed{v' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}}$$

Spezialfall: $m_1 = m_2 = m$, $v_2 = 0$

$$v' = \frac{m \cdot v_1}{2m} = \frac{v_1}{2}$$



Energie verloren:

$$\Delta E = E_{kin\,vor} - E_{kin\,nach}$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} 2m v'^2$$

$$\Delta E = \frac{1}{4} m v_1^2$$

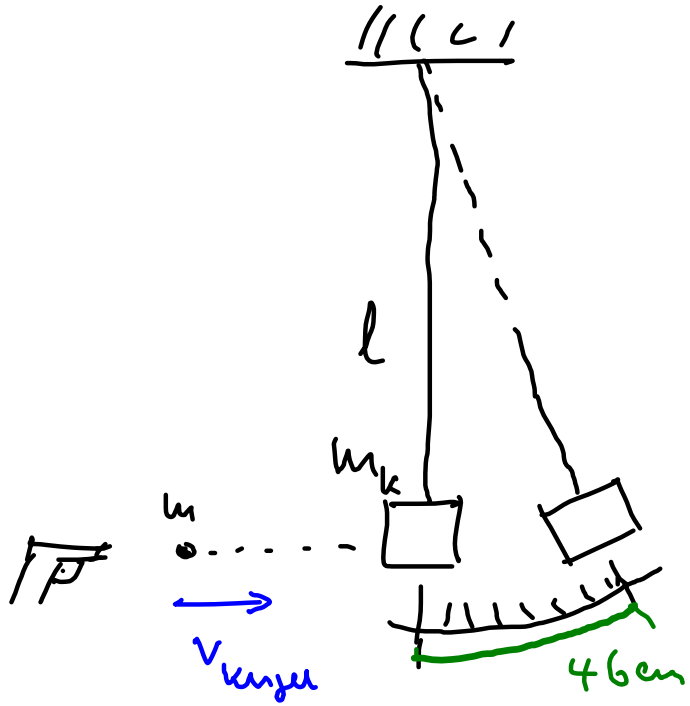
d.h. die Hälfte der ursprünglichen E_{kin} geht verloren!

Exp. Ballistisches Pendel

Pendellänge $l = 9{,}38\,m$

Masse Klotz $m_K = 3360\,g$

Masse Kugel $m = 4{,}5\,g$



gesucht: v_{Kugel} ?

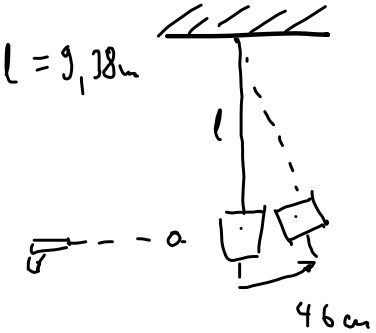
Ergebnis:

Ausschlag 31 Einheit + 1,5 ⇒ 46 cm

v_k $\quad m_{Kraft} = 3360\,g$

v_p $\quad m_{Geschoss} = 4{,}5\,g$

$l = 9{,}38\,m$



Berechnung: (1) IES

$$p_{ges\ vor} = p_{ges\ nach}$$

$$m_k \cdot v_k + m_p \cdot v_p = m_{ges} \cdot v'$$

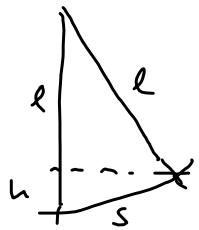
$$? \quad \underline{\underline{v_p}} = \frac{m_{ges}}{m_p} \cdot v'$$

(2) EES $\quad E_{kin} = E_{pot}$ (Pendel)

$$\frac{1}{2} m_{ges} v'^2 = m_{ges} \cdot g \cdot h$$

$$v' = \sqrt{2g \cdot h}$$

$$v' = 0{,}47\,\frac{m}{s}$$



$$h = l\left(1 - \cos\left(\frac{s}{l}\right)\right)$$

$$h = 1{,}13\,cm$$

eingesetzt in (1): $\quad v_p = 352\,\frac{m}{s}$

$$E_{kin\ Geschoss} = \frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{1}{2}\, 0{,}0045\,kg \cdot \left(350\,\frac{m}{s}\right)^2 = 270\,J$$

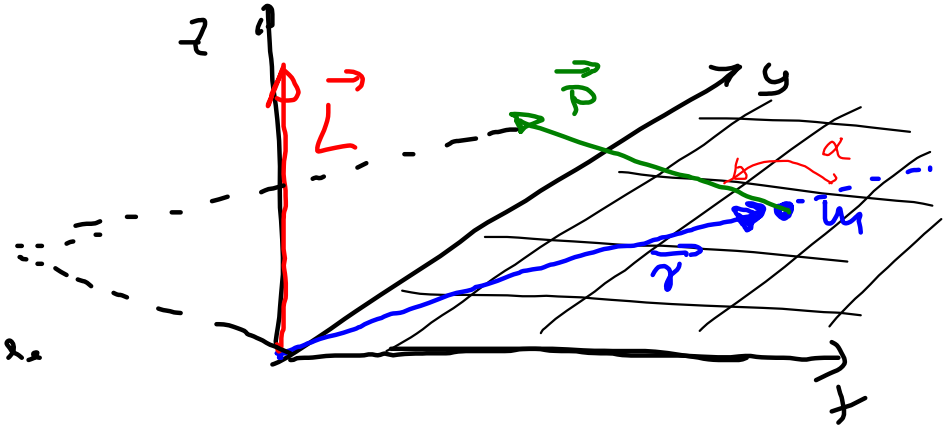
$$E_{kin\ Klotz} = \frac{1}{2} m_k v'^2 = \frac{1}{2}\, 3{,}3645\,kg \left(0{,}47\,\frac{m}{s}\right)^2 = 0{,}41\,J$$

8) Drehbewegungen eines Massepunktes

8.1. Drehimpuls

Definition $\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$

Einheit $\frac{kg \cdot m^2}{s} = Nm \cdot s$



- $\vec{L} \perp$ auf Fläche $\vec{r} \times \vec{p}$

$|\vec{L}|$ proportional zur Fläche

$\vec{r} \perp \vec{p} \longrightarrow |\vec{L}| = max$

$\vec{r} \parallel \vec{p} \longrightarrow |\vec{L}| = 0$

(rechte Handregel)

Beispiel 1 Kreisbewegung

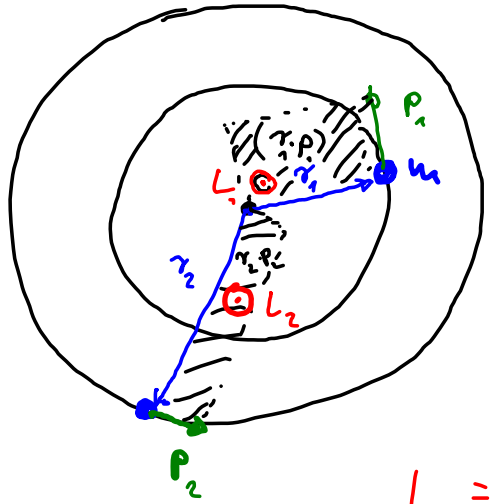
Exp

$|\vec{p}| = \text{const}(t)$

$|\vec{r}| = \text{const}(t)$

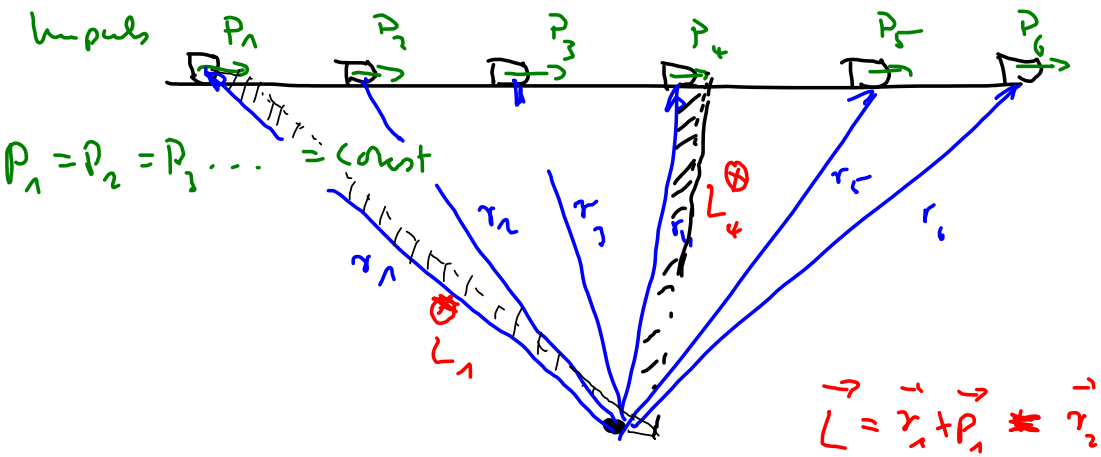
$\measuredangle\, \vec{r}, \vec{p} = 90°$

$\vec{L} = \text{const} \rightarrow \vec{L}_1 = \vec{L}_2$



$L_1 = L_2$!

Beispiel 2 lineare Bewegung

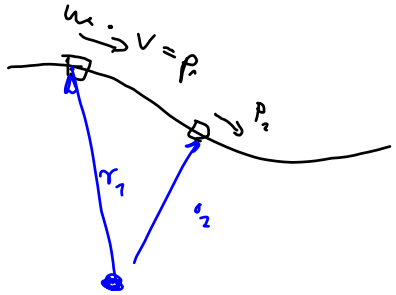


$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_1 = \vec{r}_3 \times \vec{p}_3 \ldots$

$= \text{const}$

· Drehimpuls

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$



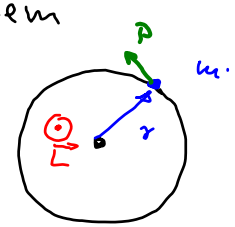
Spezielle Bewegung:

Körper (MP) auf Kreisbahn

z.B. Erde um Sonne

Elektron um Atomkern

da $\vec{r} \perp \vec{p}$ skalar formulierbar:



$$\boxed{L = r \cdot p}$$

$= r \cdot m \cdot v$ $\qquad v = r \cdot \omega \qquad \omega =$ Winkelgeschw.

$= r \cdot m \cdot r \cdot \omega$

$L = m \cdot r^2 \cdot \omega$

neue Konstante $\boxed{J = m r^2}$

J = Trägheitsmoment

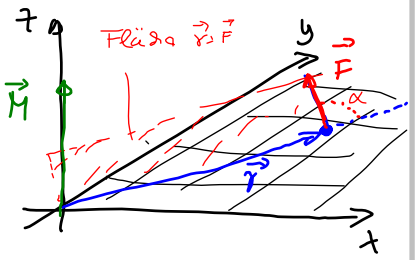
Hinweis: $J \sim m$, $J \sim r^2$

Bahndrehimpuls: Bewegung eines Massepunktes um ein Zentrum

8.2. Drehmoment

Definition $\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$

Einheit $\frac{kg\,m^2}{s^2} = N \cdot m$

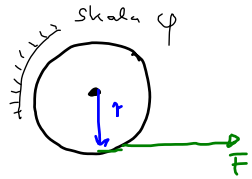


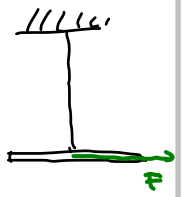
Betrag des Drehmoments:

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\alpha$$

Exp. Drehmomentenschleuder

Exp. Messung des Drehmoments





Hooke'sches Gesetz für Drehung

$$\boxed{M = -D^* \cdot \varphi}$$

D^* Rückstellrichtgröße

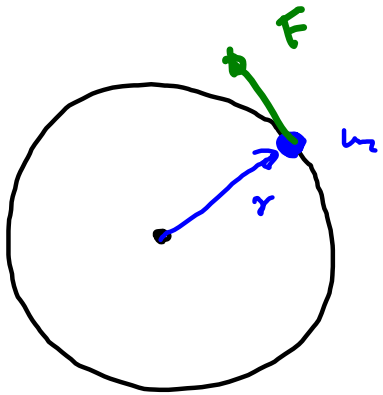
φ Auslenkungswinkel

Vergleich der Größen:

Translation			Rotation		
Kraft	F	N	Drehmoment	M	Nm
Impuls	p	Ns	Drehimpuls	L	$Nm \cdot s$
Strecke	s	m	Winkel	φ	rad
Federkonstante	D	$\frac{N}{m}$	Winkelrichtgröße	D^*	$\frac{Nm}{rad}$

8.3. Drehimpulssatz, Drehimpulserhaltungssatz

Erinnerung: Impulssatz: $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$



Änderung des Drehimpulses $\vec{L}$ durch Momentenstoß (Kraft · Hebelarm)

$$\Delta L = \int_{t_1}^{t_2} M \, dt = \int_{t_1}^{t_2} r \cdot F \, dt$$

Wenn r und F const: $\Delta L = M \cdot \Delta t$ $\quad \Delta t = t_2 - t_1$

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

allgemein $\boxed{\vec{M} = \dot{\vec{L}}}$ Drehimpulssatz

Wenn <u>kein</u> Moment wirkt ($\vec{M}_a = 0$):

$$\boxed{\vec{L} = \text{const}}$$

Drehimpulserhaltungssatz

wichtig: <u>Richtung</u> und <u>Betrag</u> const !!

Anwendungen:
- Planetenbahnen
- Satellitenbahnen

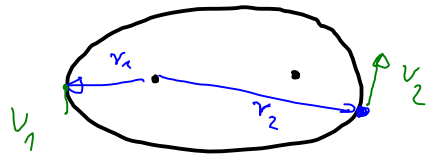
$\Big\}$ → Kepler'sche Gesetze

Ellipsenbahnen

$$L = J \cdot \omega$$

$$L = J \frac{v}{r}$$

$$= m \cdot r^2 \cdot \frac{v}{r}$$



- Sport: Diskus, Fräsen
- Geschosse (Drall)

8.4. Arbeit, Leistung, Energie

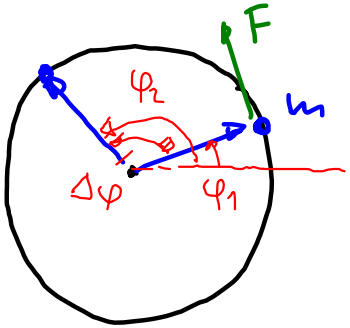
Arbeit: linear $W = \text{Kraft} \cdot \text{Weg}$

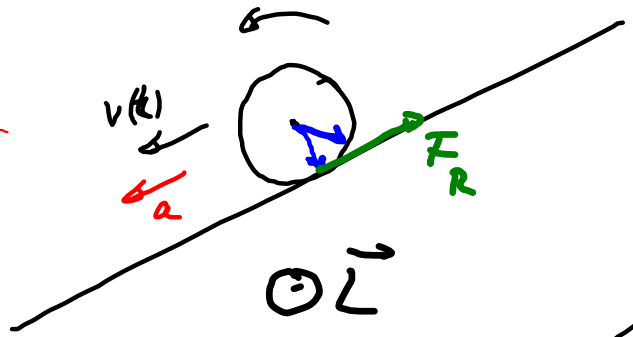
Drehung $W = M \cdot \Delta\varphi$

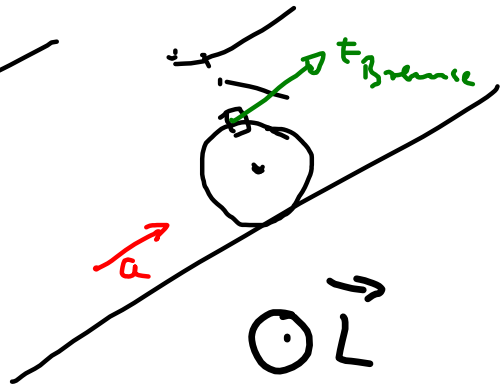
$$\boxed{W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi)\, d\varphi}$$

Dreharbeit

Einheit $J = \frac{kg\, m^2}{s^2} = N \cdot m$







Leistung :

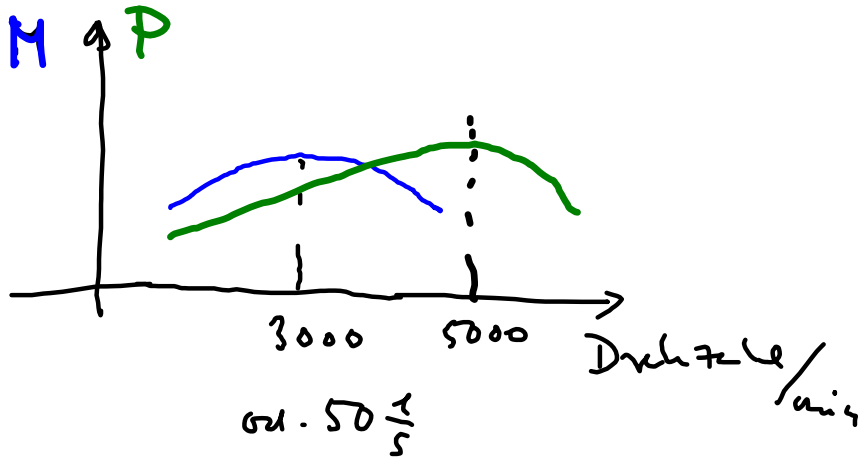
Leistung = Arbeit pro Zeit

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = M \cdot \dot{\varphi} = M \cdot \omega}$$

φ Drehwinkel

ω Winkelgeschw.

Einheit $\frac{J}{s}$ = Watt



Energie: $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$ linear

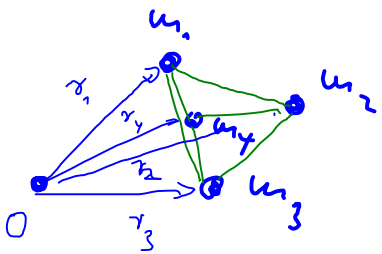
$$\boxed{E_{kin\,rot} = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2}$$ Einheit $J = N \cdot m$

Energiesatz für Drehbewegungen:

$$\boxed{W = E_{kin\,rot\,2} - E_{kin\,rot\,1} = \Delta E_{kin\,rot} = \frac{1}{2} J \left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)}$$

8.5. Starrer Körper

Eigenschaft: Trägheitsmoment



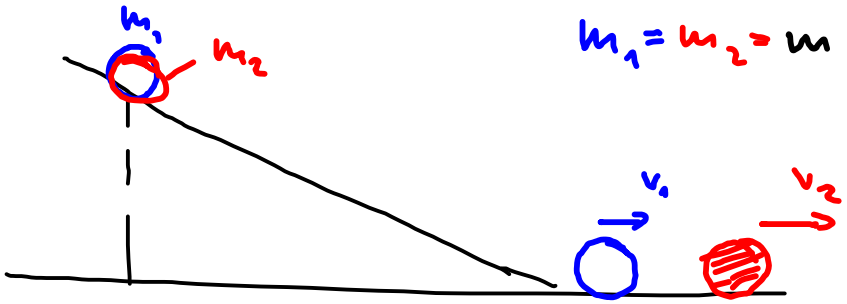
Trägheitsmoment für

- 1 Massepunkt: $J = m \cdot r^2$
- viele MP: $J = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} J_i$
- starre Körper: $J = \int_{\text{Körper}} r^2 \, dm$

Exp:

$m_1 = m_2 = m$

$r_1 = r_2 = r$



$m_1 = m_2 = m$

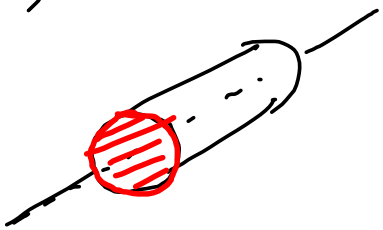
Trägheitsmoment ist für einfache Körper berechenbar, sonst nur experimentell bestimmbar!

a) dünnwandiger Hohlzylinder (Ring)

$$J_{ges} = \int r^2 dm = r^2 \int dm = r^2 \cdot m$$

b) homogener Vollzylinder (Scheibe)

$$J_{ges} = \frac{1}{2} r^2 \cdot m$$



Lösung des Rollenexperiments:

EES: $E_{pot} = E_{kin}^{rot} + E_{kin}^{trans}$

$$= \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 \qquad v = r \cdot \omega$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \omega^2 (J + m r^2) = const$$

da $J_{Rolle} = \frac{1}{2} J_{Hohl}$:

$$\Delta\omega = (\omega_{hohl} - \omega_{Rolle}) \approx 14\%$$

Eigendrehimpuls des starren Körpers:

$$\boxed{\vec{L}_E = \tilde{J} \cdot \vec{\omega}}$$

Einheit: $\frac{kg\,m^2}{s}$

$\tilde{J}$ ist im allgemeinen ein nichtkomponentiger Tensor

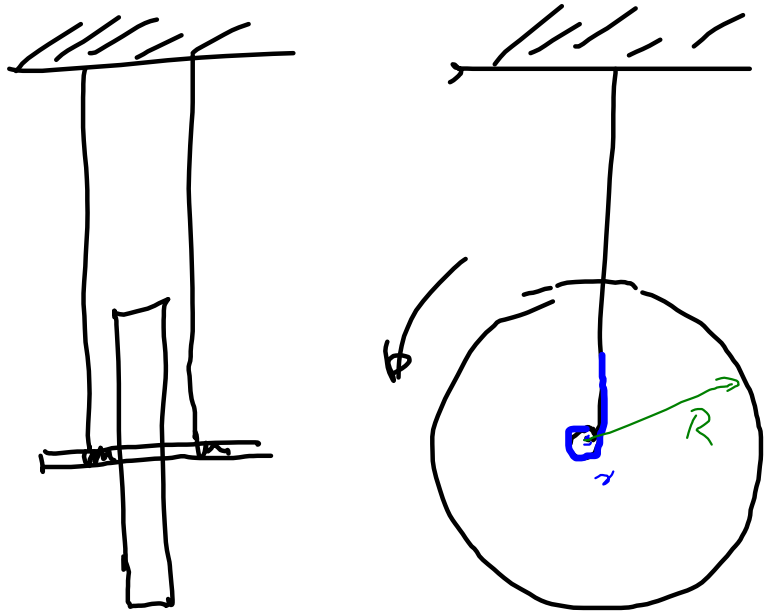
bei symmetrischen Körpern (speziell)

$\vec{L}_E \parallel \vec{\omega} \Rightarrow J$ skalar

Drehimpulssatz für starre Körper:

$$\boxed{\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = J \cdot \dot{\vec{\omega}} = J \cdot \vec{\alpha}}$$

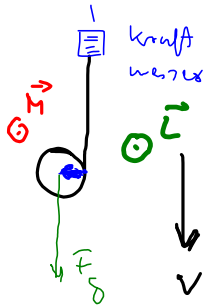
Exp: Maxwell rad $(J_a - J_0)$



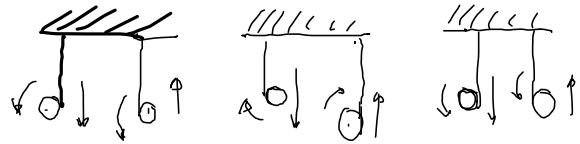
Erläuterungen zum Maxwellrad

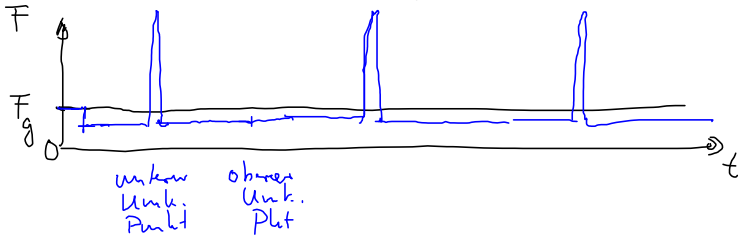
Es wirkt stets ein konstantes Drehmoment

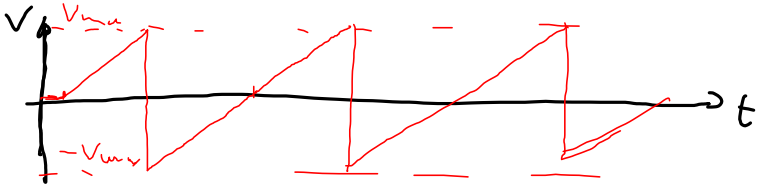
$$M = r \cdot F_g = r \cdot m \cdot g = J \cdot \alpha$$

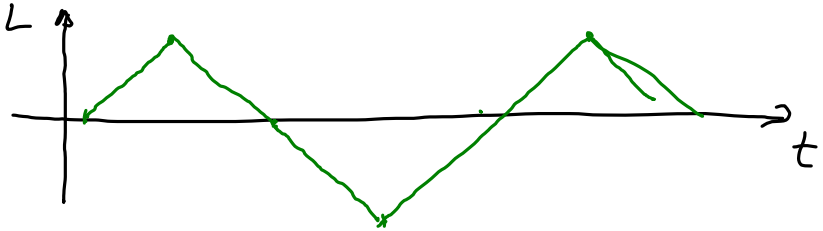


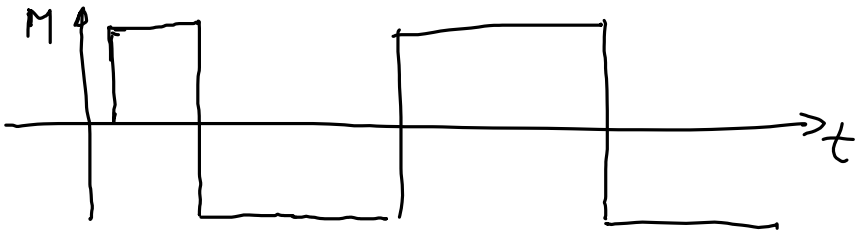
Beobachtung:





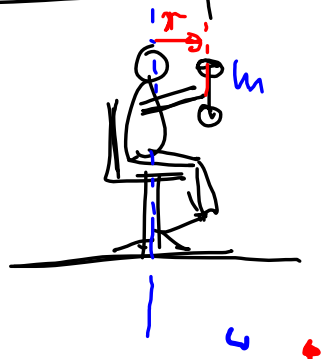






Drehimpulserhaltungssatz

Wenn $\vec{M}_a = 0$: $\boxed{\vec{L} = \text{const} = J \cdot \vec{\omega}}$



Exp Drehsessel

a) Hantelm r variiert
(Pirouette)

b) Rad $\vec{M}_a = 0 \rightarrow \vec{L}_{\text{vertikal}} = 0$

$L_{ges} = L_{Stuhl} + L_{Rad}$

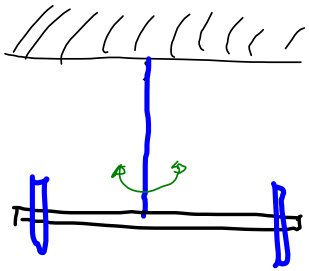
Exp Messung von Trägheitsmomenten

Trägheitsmoment abhängig von Drehachse

Drehfrequenz ω

$$\omega = \sqrt{\frac{D^*}{J}}$$

$$\rightarrow J = \frac{D^*}{\omega^2}$$



Zusammenfassung:

Ein Körper hat: – Eigendrehimpuls $\vec{L}_E$ (Drehachse durch Schwerpunkt)

– Bahndrehimpuls $\vec{L}_B$

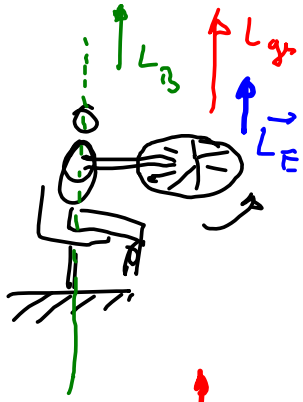
$$\boxed{\vec{L}_{ges} = \vec{L}_E + \vec{L}_B}$$

z.B. – System Erde-Sonne

– Elektron um Atom

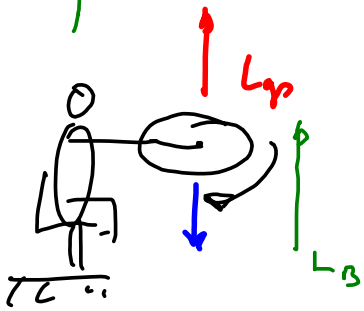
$$\vec{L}_{ges} = J_{Körper} \cdot \vec{\omega}_{Körper} + m R^2_{Bahn} \cdot \vec{\omega}_{Bahn}$$

Erinnerung Exp:



1. Schritt: $\vec{L}_B = 0$

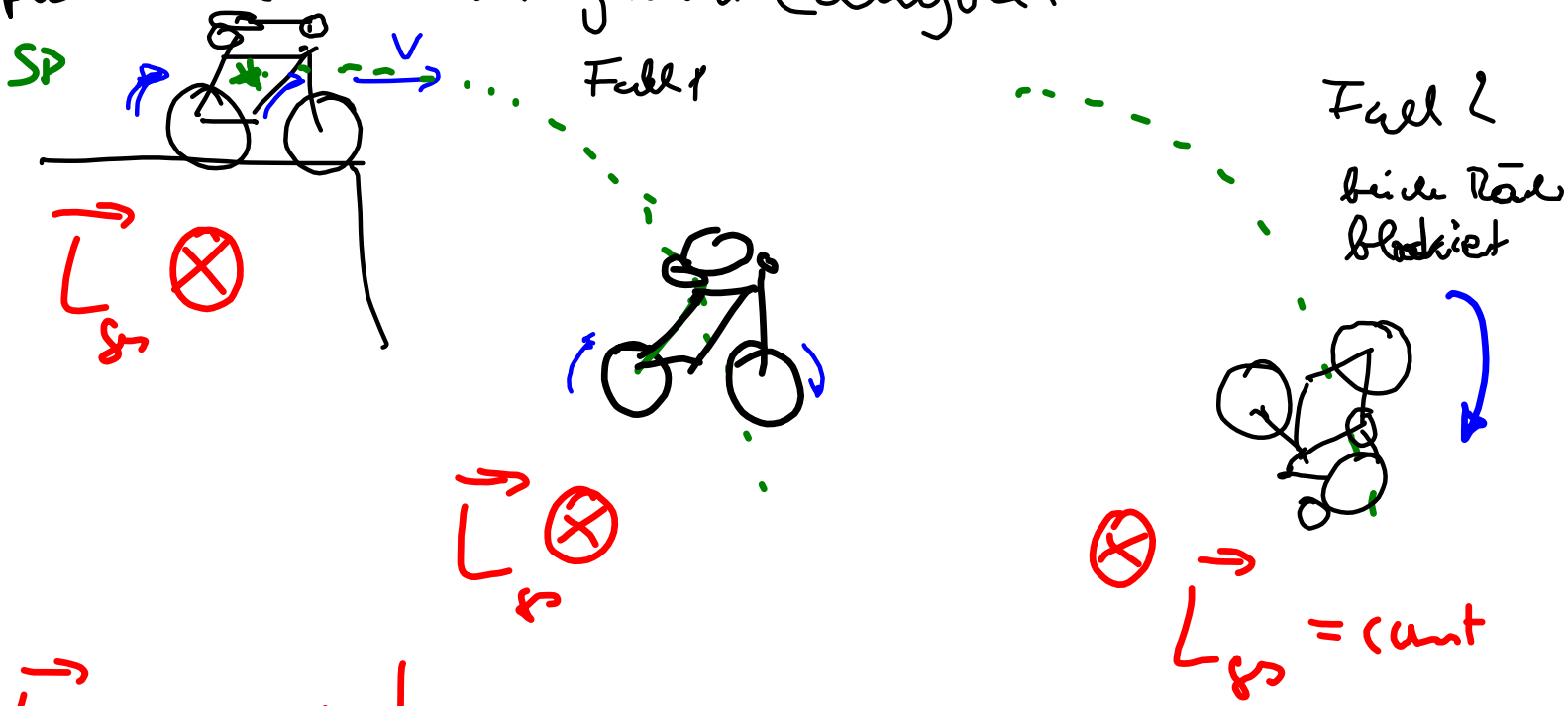
$\vec{L}_{ges} = \vec{L}_E$



2. Schritt $\vec{L}_{ges} = -\vec{L}_E + \vec{L}_B$

$\rightarrow \vec{L}_B = 2\vec{L}_E$

Beispiel Fahrrad im Grand Canyon:



$\vec{L}_{SP}$ = const !

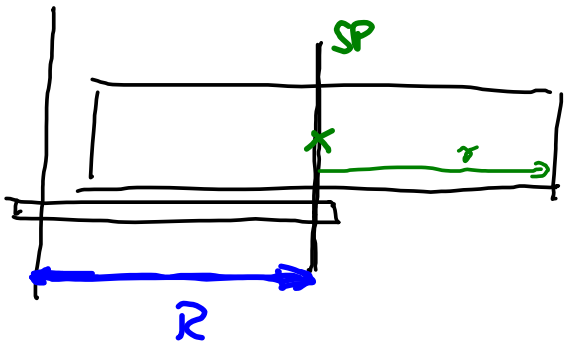
Exp.

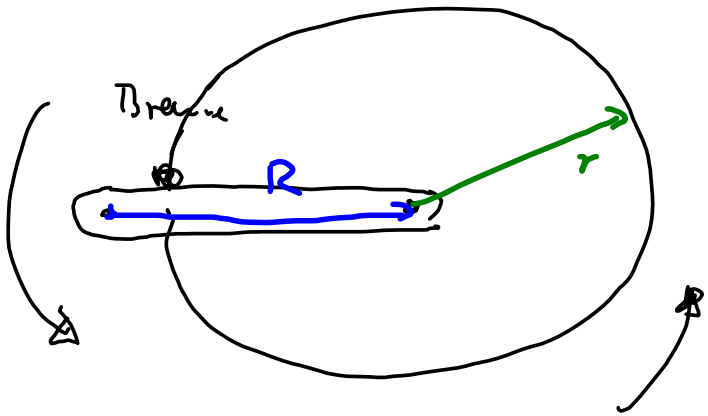
a) Zylinder entkoppelt:

$$\vec{L}_E = 0$$

$$\vec{L}_B = m_{Zyl} \cdot R^2 \cdot \omega_B$$

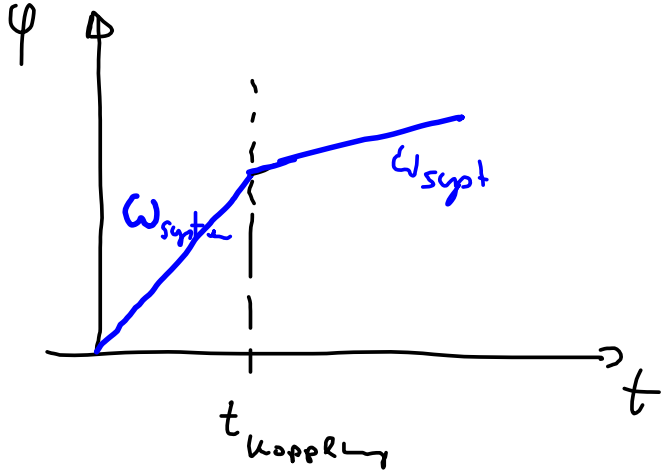
$$\vec{L}_{ges} = \vec{L}_B = \text{const}$$





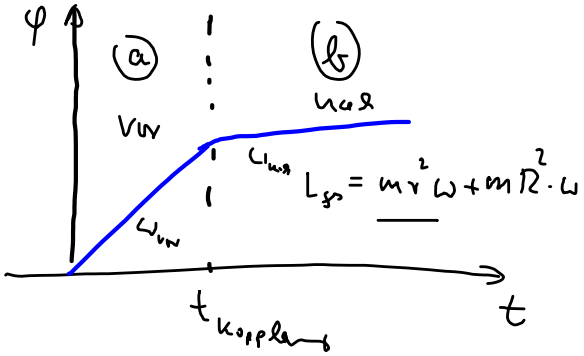
b) Zylinder starr gekoppelt:

$$\vec{L}_{ges} = \vec{L}_E + \vec{L}_B = \text{const}$$



Drehenergie?

$$E_{Rot} = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$



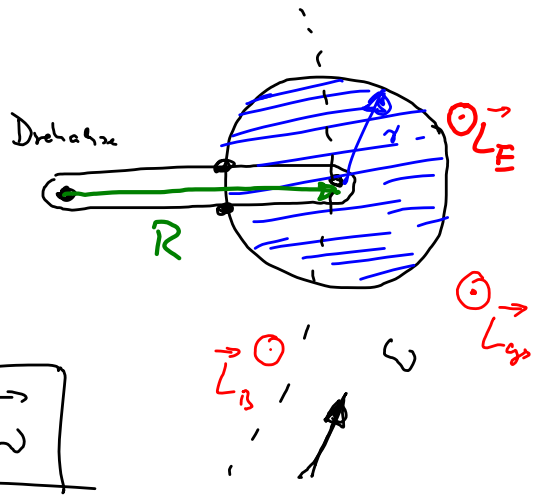
Drehachse außerhalb des Schwerpunktes eines (einfachen) Körpers (Steiner'scher Satz):

Starrer Körper:

$$\vec{L}_{ges} = \vec{L}_E + \vec{L}_B$$

$$= J_{Körper} \cdot \omega + m \cdot R^2 \omega$$

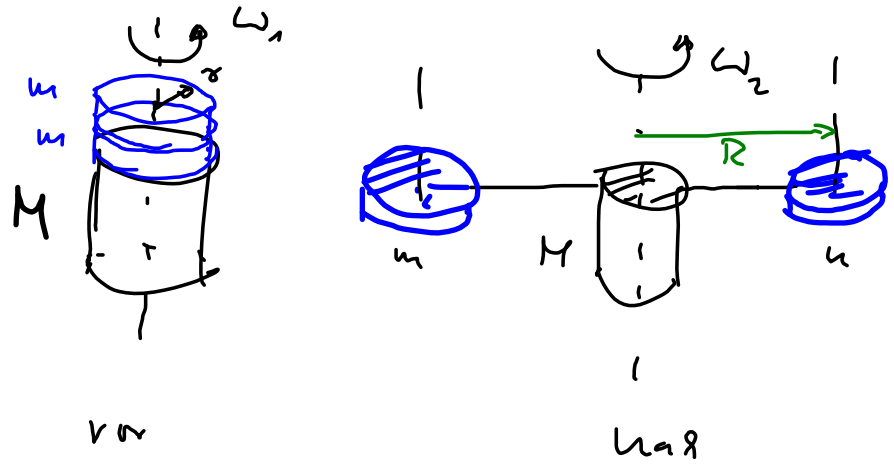
$$\boxed{\vec{L}_{ges} = \left(J_{Körper} + J_{Steiner}\right) \cdot \vec{\omega}}$$



Steiner'scher Satz:

Das Trägheitsmoment eines Körpers vergrößert sich um den Betrag mR^2, wenn sich die Drehachse im Abstand R zum Schwerpunkt befindet.

Beispiel: Satellit mit 2 Solarpanels.



vor

nach

Radius Körper r

$R = 3r$

$M = 4m$

Es gilt Drl. E.S.: $\vec{L}_{ges} = const$

$$J_{Scheibe} = \frac{1}{2} m r^2$$

$$\vec{L}_{ges\,vor} = \vec{L}_{ges\,nach}$$

$$\Big(\underbrace{\frac{1}{2} M r^2}_{\text{Satellit}} + 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2} m r^2}_{\text{Panele}}\Big)\omega_1 = \Big(\frac{1}{2} M r^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m r^2 + \underbrace{2 \cdot m \cdot R^2}_{\text{Steiner}}\Big) \cdot \omega_2$$

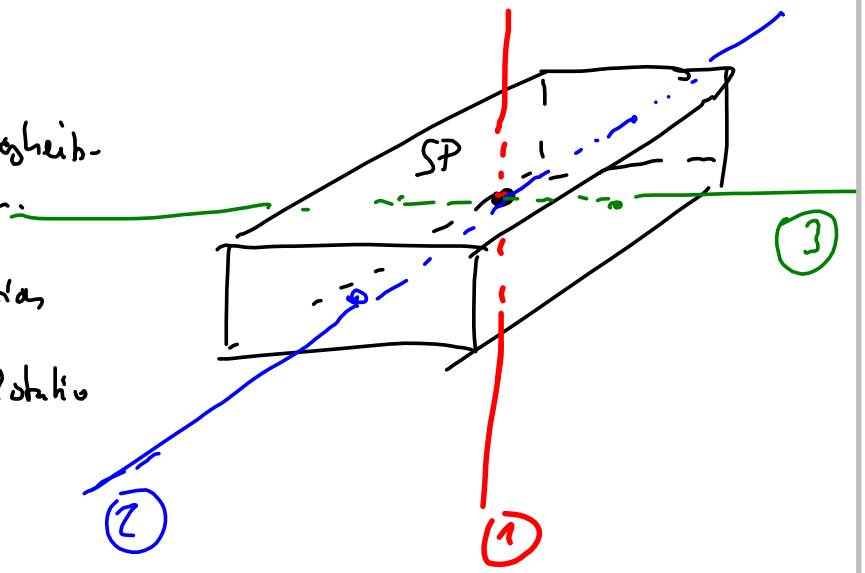
$$\omega_1 = \frac{1}{7}\omega_2$$

8.6. Hauptträgheitsachsen

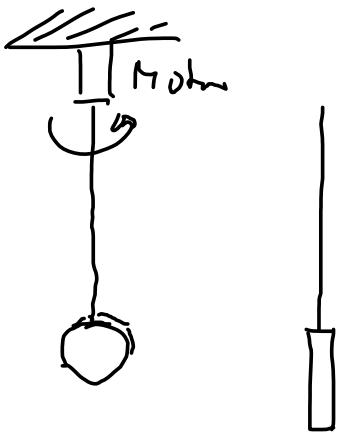
Freie Achsen gehen immer durch den SP vorbei

Körper strebt stets Rotation um die Hauptträgheitsachse mit dem größten J an.

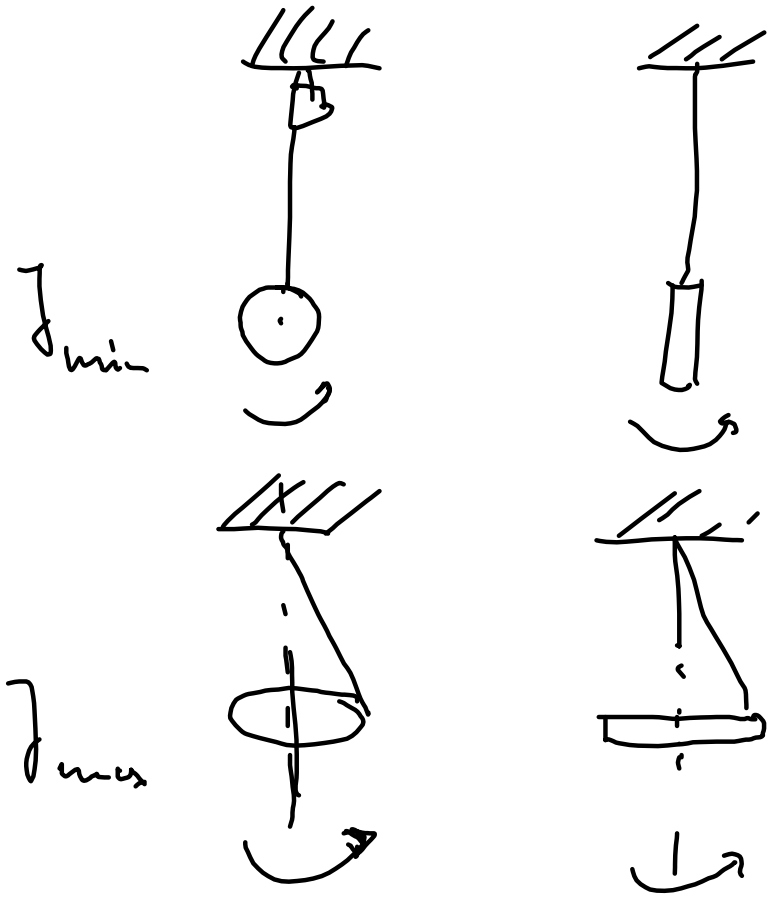
1. J_{max} → stabile Rotation
2. J_{min} → "halbstabile" Rotation
3. J_{mittel} → instabil



Exp: Hauptträgheitsachsen:



Exp: Hauptträgheitsachsen mit J_{max}



Exp. Zentrifugalmomente

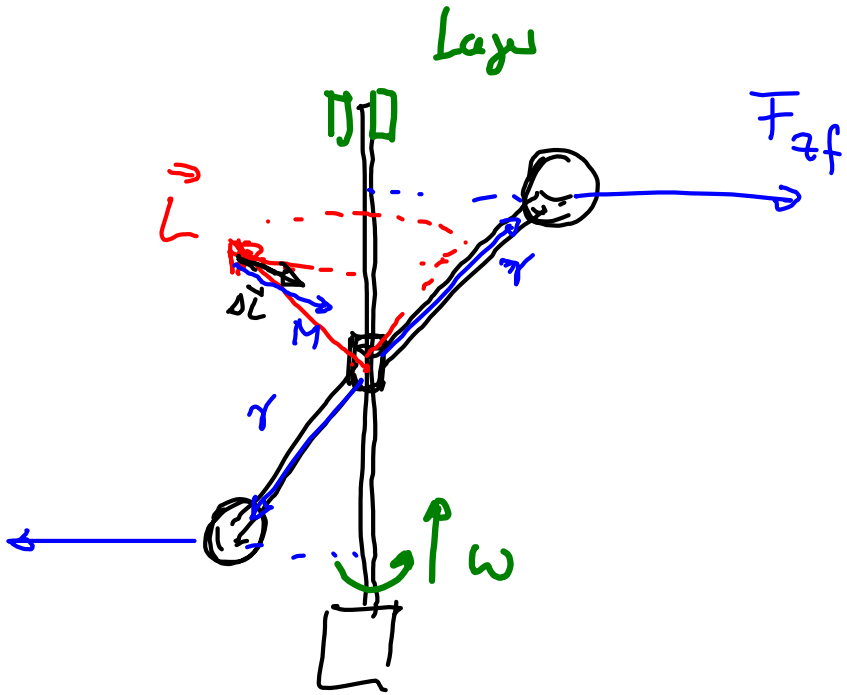
Da $\vec{L}$ sich ändert ($\Delta\vec{L}$)

$\rightarrow \vec{M} \neq 0$

Erinnerung: Drehimpulssatz

$$\vec{M} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \dot{\vec{L}}$$

$\rightarrow \vec{M} \parallel \Delta\vec{L}$



$\vec{M} \perp$ Drehachse

Folge: Lagerkräfte

F_{zf} bewirkt, daß Massenverteilung J_{max} anstrebt.

$L = J \cdot \omega$: Wenn J maximal ist, ist ω minimal

$\rightarrow$ Minimierung der $E_{kin,rot} = \frac{1}{2} J \omega^2$

8.7. Präzession (Kreisel)

Jeder rotierende Körper ist ein Kreisel

Drehimpuls $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$

Drehimpulssatz $\boxed{\vec{M}_a = \dot{\vec{L}}}$ Drehimpuls wird durch äußeres Moment geändert

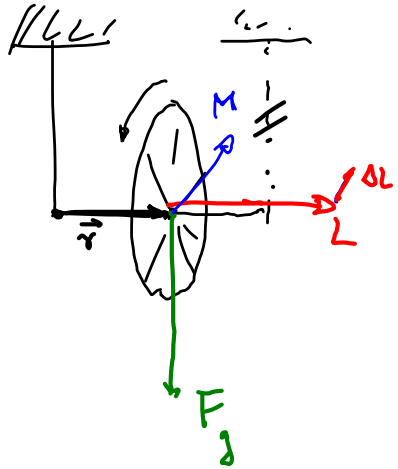
Zwei Fälle: 1) $\vec{M}_a \parallel \pm \vec{L}$ Richtung von $\vec{L}$ = const nur Betrag ändert sich

<u>nun</u> 2) $\vec{M}_a \perp \vec{L}$

<u>Bsp.</u> Rad

$$\vec{M}_a = \vec{r} + \vec{F}_g$$

$$\vec{\Delta L} \parallel \vec{M}$$



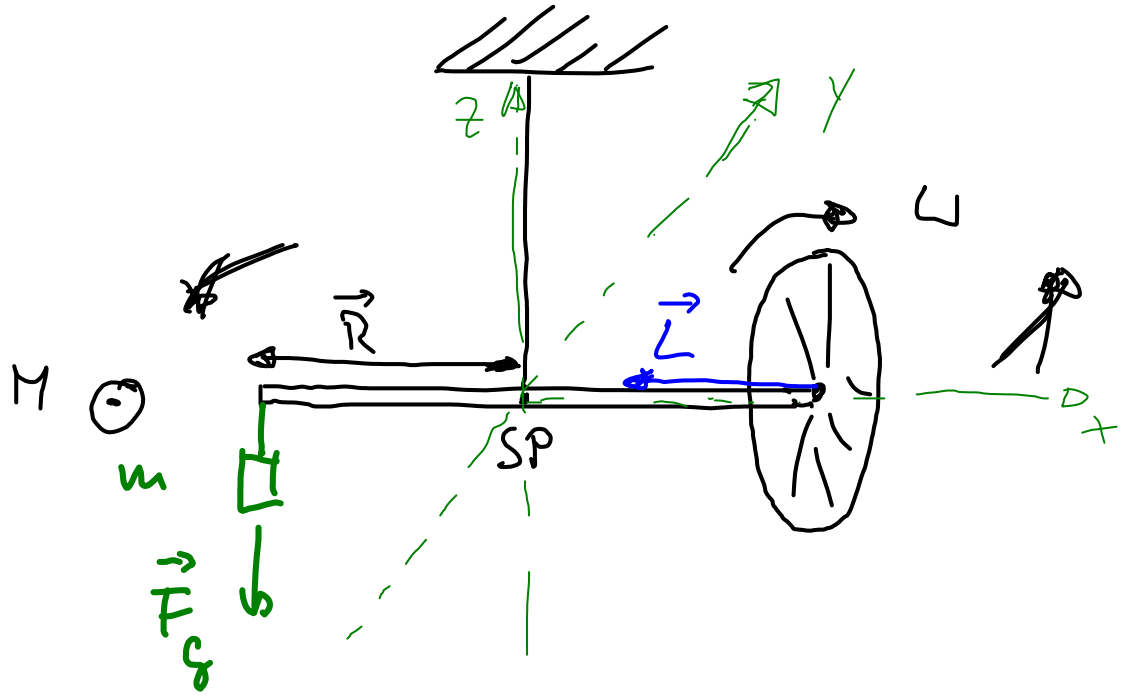
Satz von gleichsinnigen Parallelismus:

Ein Kreisel verhält sich unter dem Einfluss einer Störung (Drehmoment, Zwangsdrehung) so, dass er versucht, die Richtung seines Drehimpulsvektors auf kürzestem Weg gleichsinnig parallel zum Vektor der Störung einzustellen.

Kreiselgesetze: Anwendung Fahrrad

Exp.: Modell Vorderrad (Deckelkreisel)

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

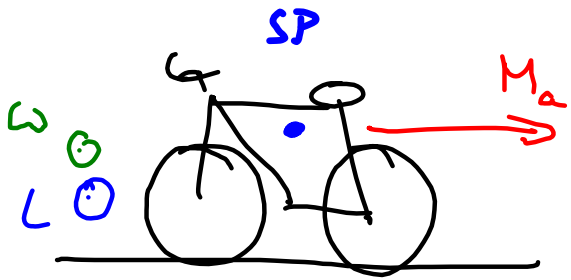


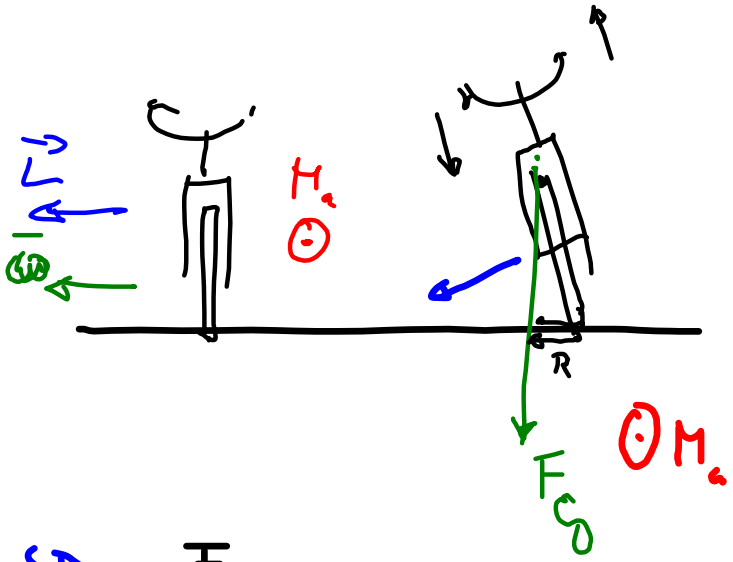
Durch Einwirkung eines Drehmoments:

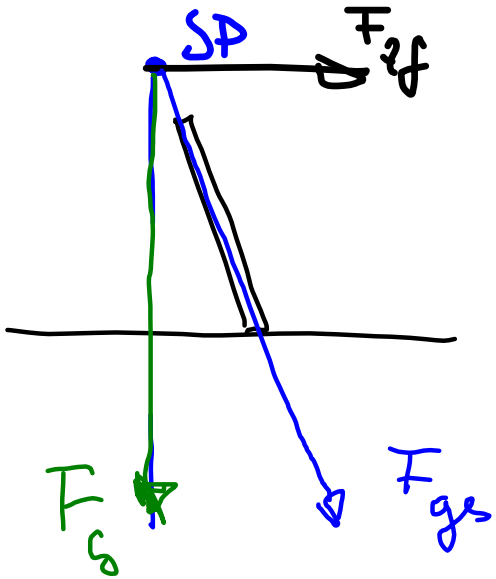
→ Präzession

Präzessionsfrequenz $\omega_P = \frac{M}{L} = \frac{r \cdot F}{J \cdot \omega}$

a) freihändig "lenken"



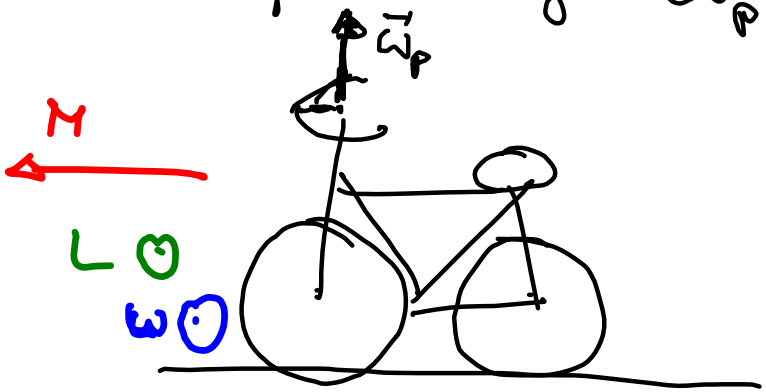




Linkskurve

b. Mit Lenker lenken

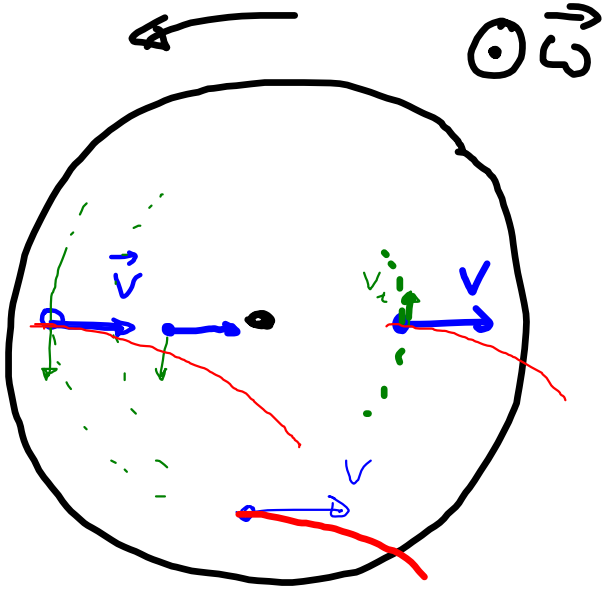
Zwangsdrehung ω_p (Drehung am Lenker)



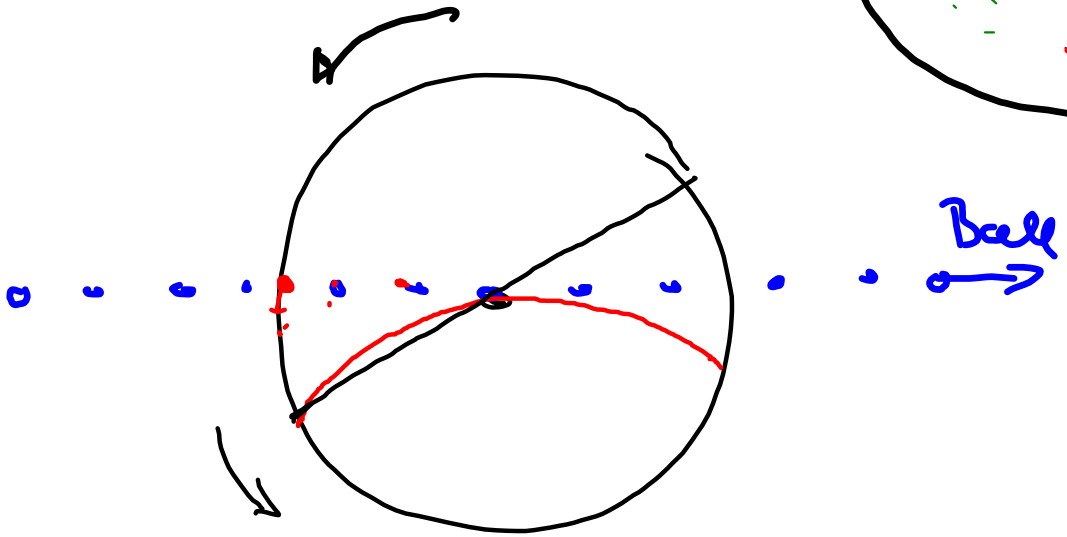
$$\boxed{M = \vec{L} \times \vec{\omega}_p}$$

Coriolis Kraft

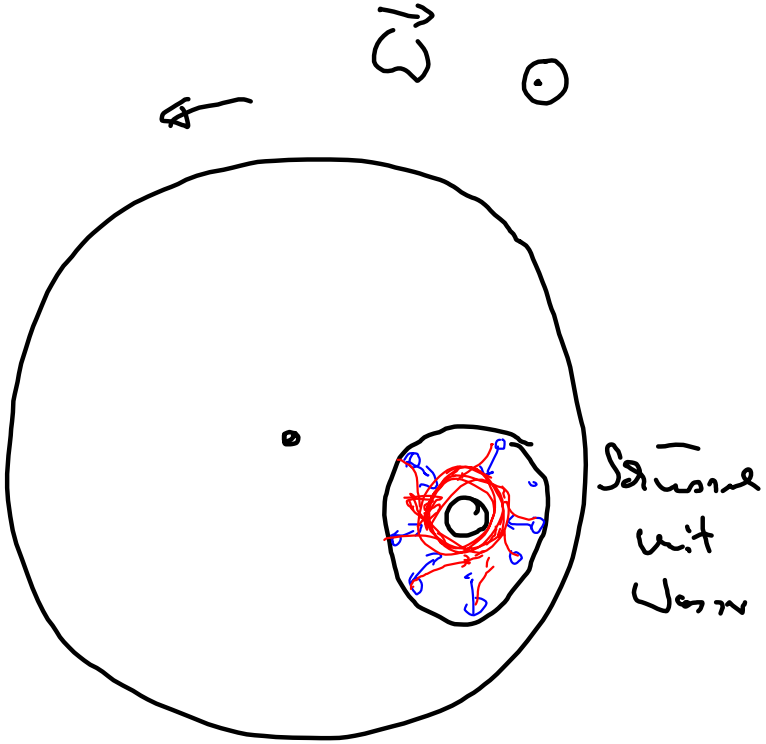
$$\vec{F}_c = 2m \cdot (\vec{v} \times \vec{\omega})$$



Exo



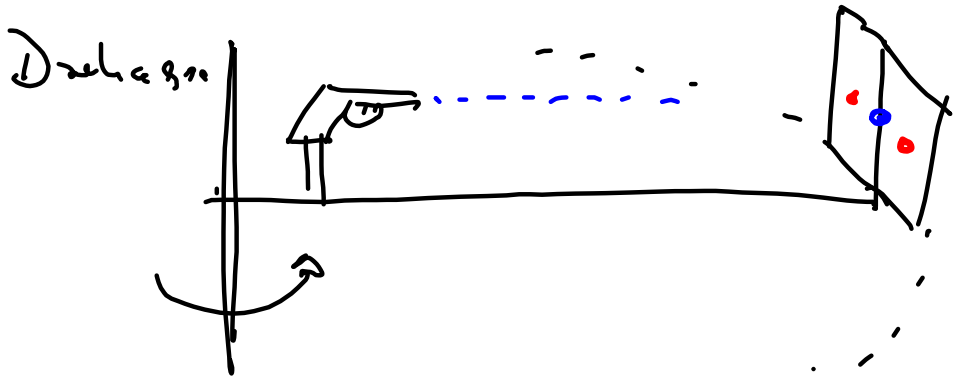
Exp Auslenkungswirbel



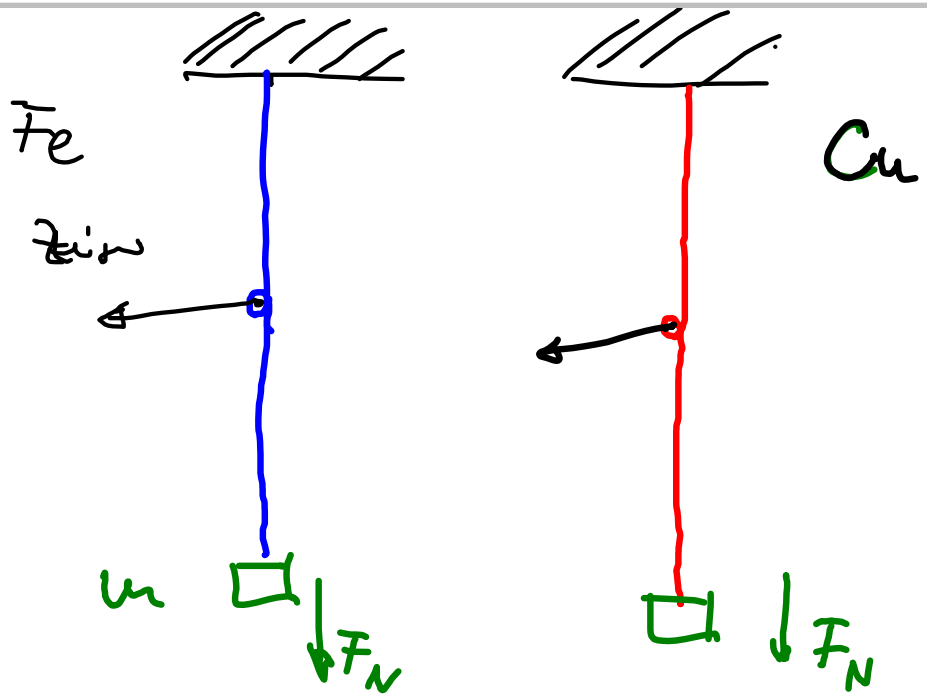
Ergebnis:

Auslenkungswirbel in Richtung der Systemdrehung

Exp Saxxoapparat

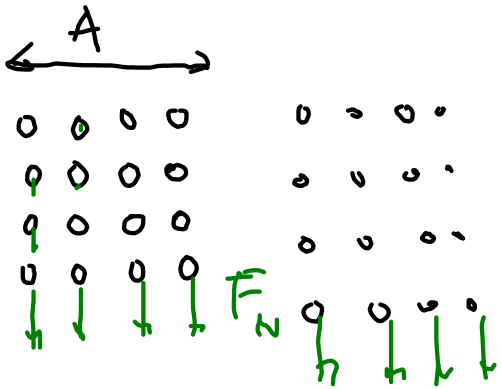


Exp



Stahldraht: Hook'sche Gesetz:

$$\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon}$$



$\sigma = \frac{F_N}{A}$ Normalspannung

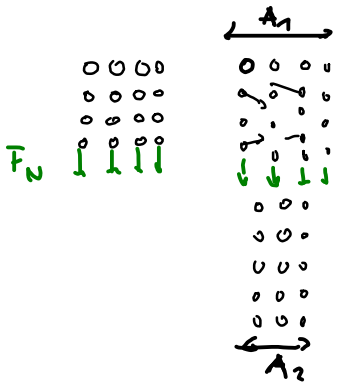
F_N = Normalkraft

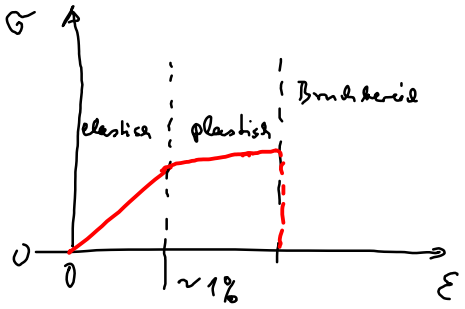
A Querschnittsfläche

E = Elastizitätsmodul

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ relative Dehnung

Verhalten von Cu-Draht: plastisch

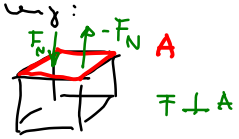




plastische Verformung, irreversibel

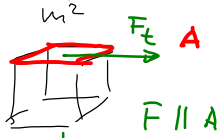
Verhalten unter mechanischer Spannung:

Normalspannung $\sigma = \frac{F_N}{A}$

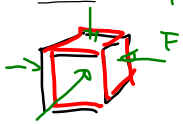


Einheit $\frac{N}{m^2}$

Tangentialspannung $\tau = \frac{F_t}{A}$



allseitiger Druck $p = \frac{F}{A}$

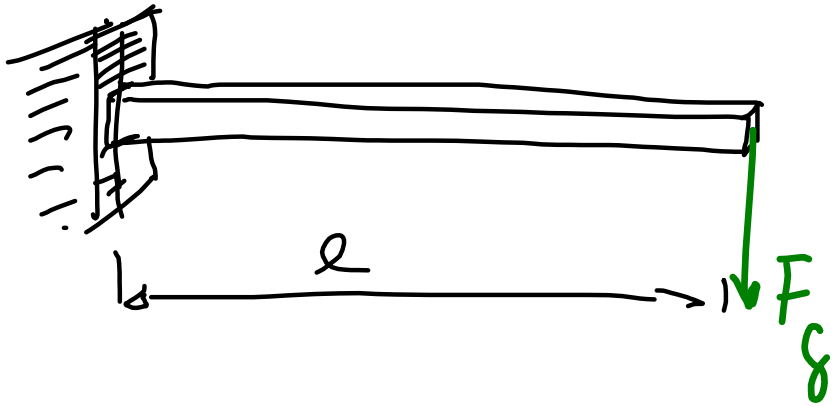


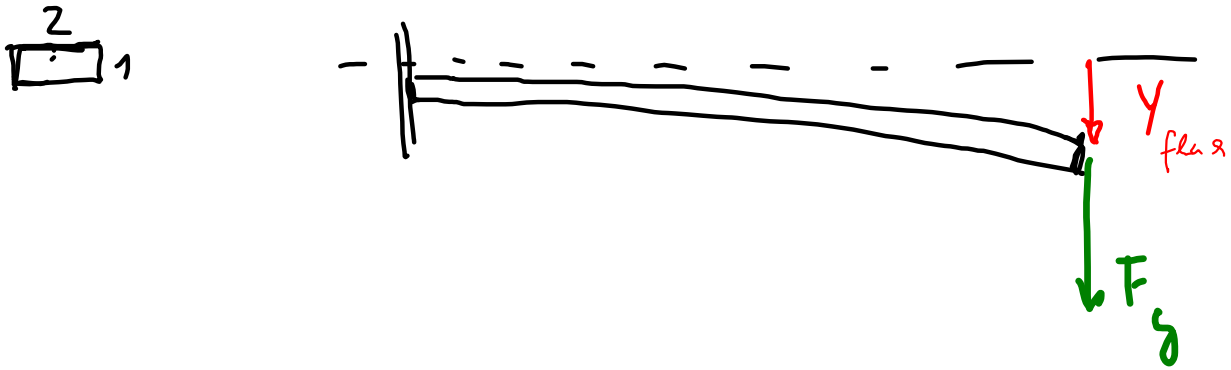
hydrostatischer Druck

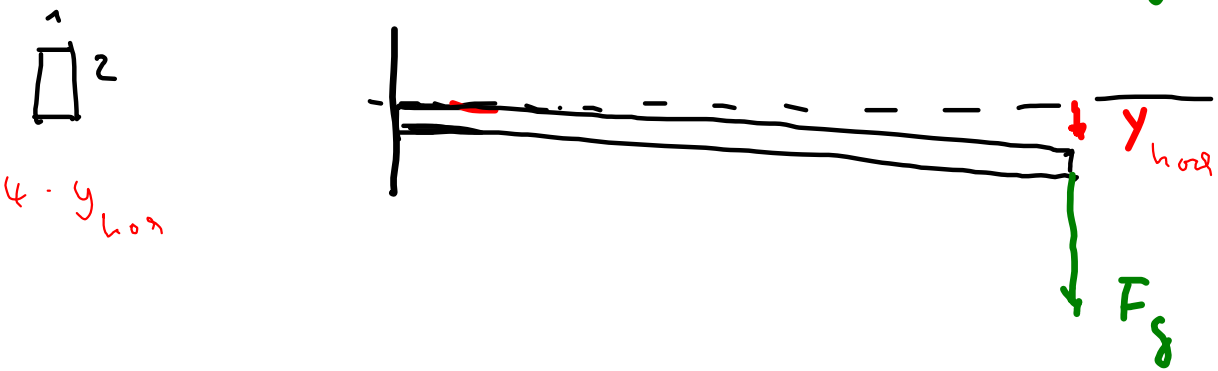
Ergebnis: Beschreibung der elastischen Eigenschaften von festen Stoffen erfolgt durch 4 elastische Konstanten:

- Druck
- Biegung
- Verdrillung
- Scherung

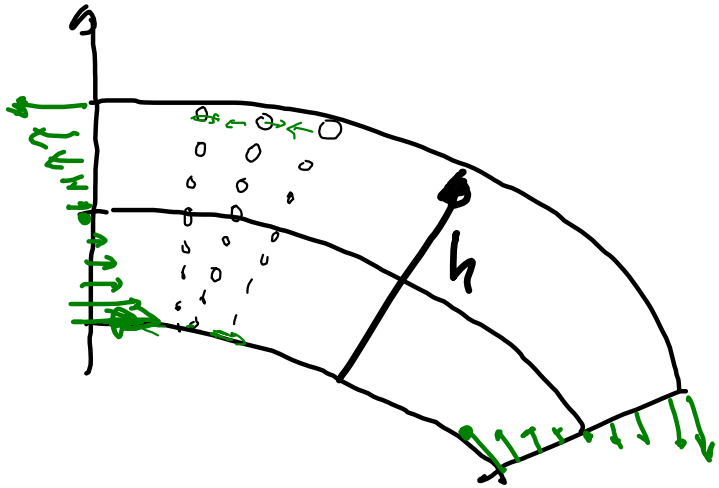
Exp Biegung eines Balkens







$y_{flat} = 4 \cdot y_{hor}$



Biegemoment

$$\boxed{M = E \cdot J_A \cdot \frac{l}{R}}$$

l Balkenlänge
R Biegeradius
E Elastizitätsmodul

$$J_A = \int y^2 \, dA$$ Einheit m^4

Flächenmoment (Werte aus Tabelle)

$$M = E J_A \frac{l}{R} \qquad J_A = \int y^2 \, dA$$

bei Rechteckprofil: $\underline{J_A = \frac{1}{12} d \cdot h^3}$

$d = 2$
$h = 1$

$$J_A = \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{1}{6} \text{ m}^4$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 8 = \frac{4}{6}$$

Ergebnis $1 : 4$

11.2. Hydro- Aerodynamik

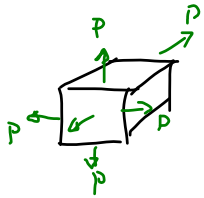
Näherung: Flüssigkeiten seien inkompressibel

a) Flüssigkeit ohne Scherendruck

da keine Scherkräfte

⇒ Druck p steht ⊥ zur Oberfläche A

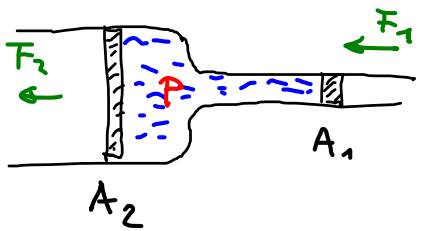
→ Druck p nach allen Seiten gleich



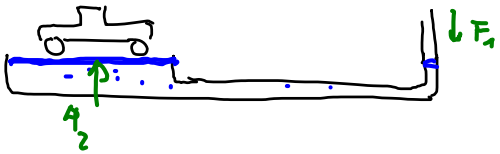
Anwendung: Kraftransformator

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$\rightarrow \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}$$



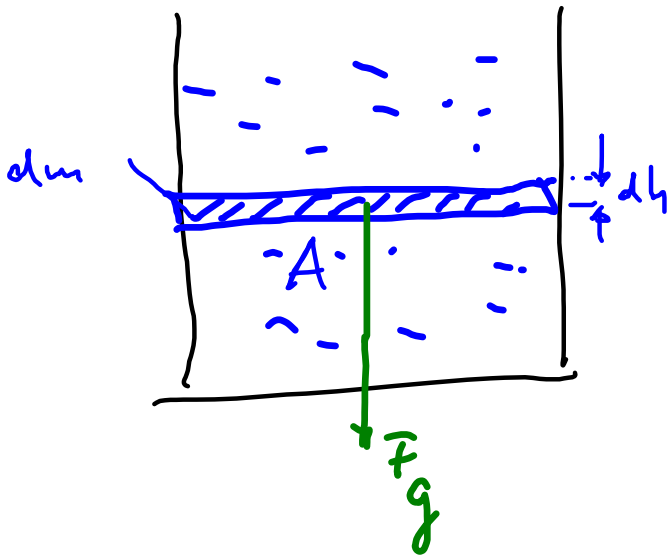
z.B. Hydraulische Presse:



b) Flüssigkeit mit Schwerendruck

$$dp = \frac{dF}{A} = \frac{dm \cdot g}{A} = \frac{\rho \cdot dV \cdot g}{A}$$

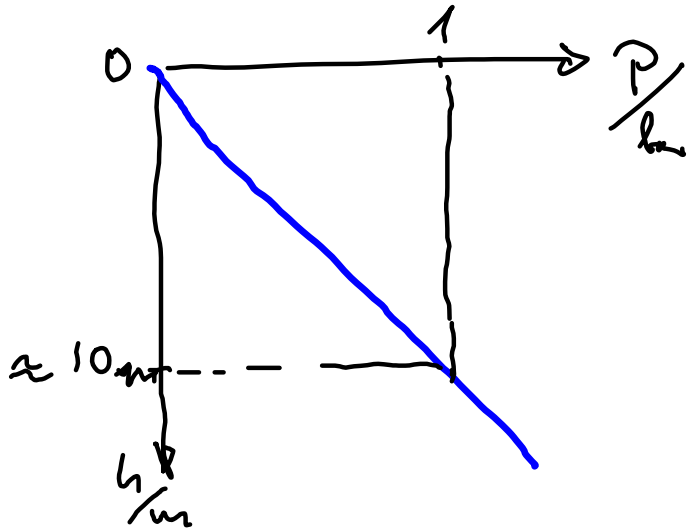
$$= \frac{\rho \cdot A \cdot dh \cdot g}{A}$$



Integriert über gesamte Füllhöhe:
($p = 0$ an der Oberfläche)

$$\boxed{p = \rho \cdot g \cdot h}$$

ρ = Dichte
g = Ortsfaktor
h = Höhe



c) Auftrieb (Prinzip v. Archimedes)

$$F_{Auftrieb} = A \cdot \Delta p$$
$$= A \rho \cdot g \cdot \Delta h$$
$$= V \cdot \rho \cdot g$$

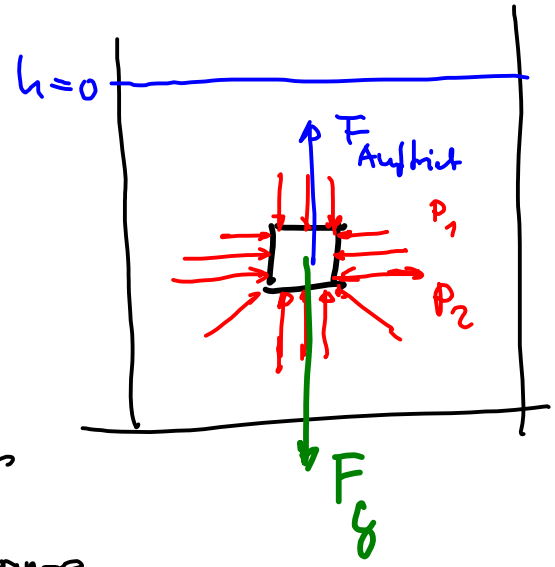
$\Delta p = p_2 - p_1$

$p = \rho \cdot g \cdot h$

$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h$

V = Volumen des Körpers

ρ = Dichte des Körpers



$$\boxed{F_A = m_{Flüssigkeit} \cdot g}$$

Auftriebskraft

$V \cdot \rho = m_{Flüssigkeit}$ (verdrängte Flüssigkeit)

3 Möglichkeiten für F_A:

$F_A > F_g$	Schwimmen
$F_A = F_g$	Schweben
$F_A < F_g$	Sinken

Exp: Cartesischer Taucher