2.1.8 Mohrscher Spannungskreis (Mohr 1882)

Drehung des Koordinatensystems (2D):

$$\sigma'_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma'_{11} & \tau'_{12} \\ \tau'_{12} & \sigma'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

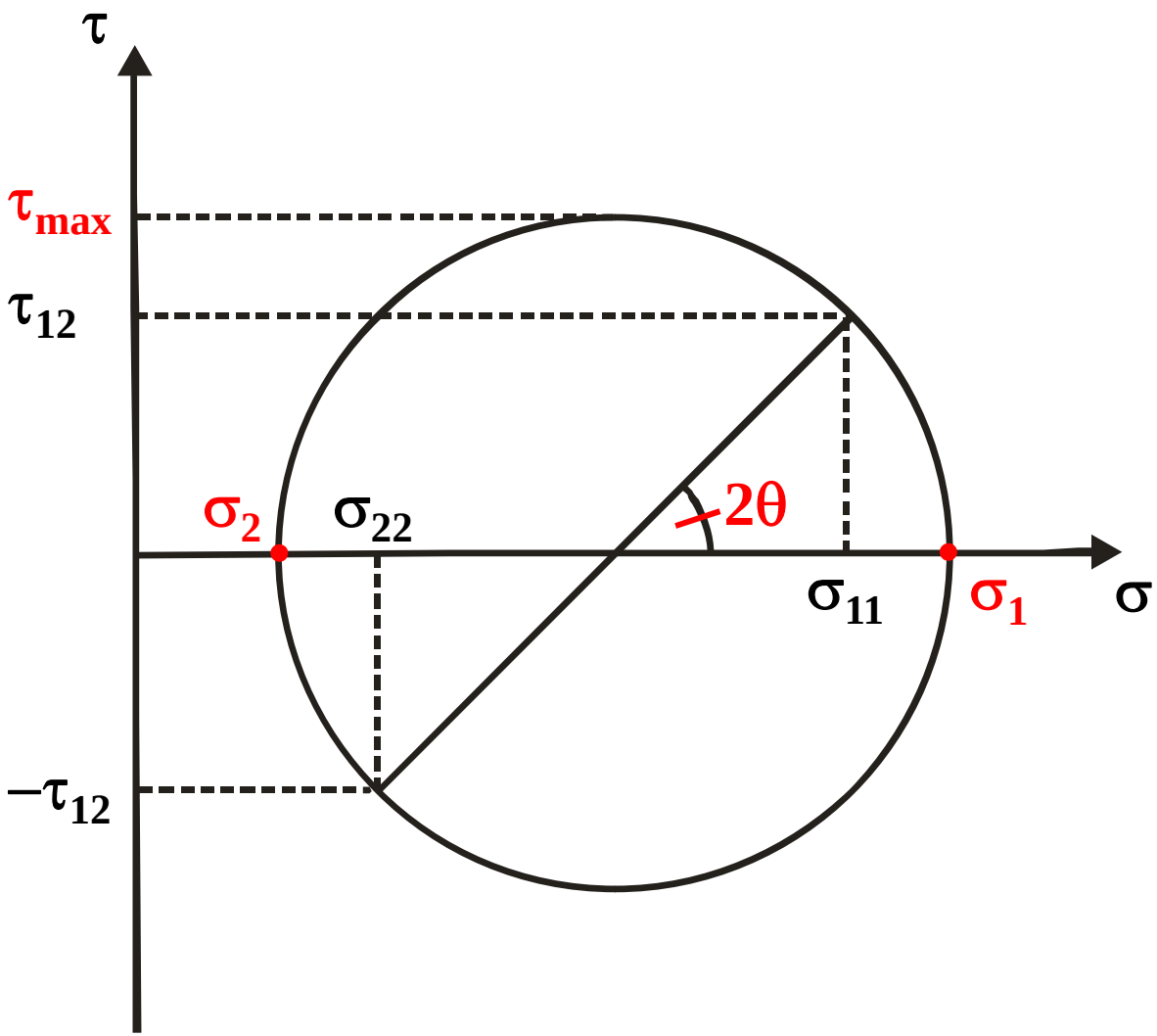
Ergebnis (allgemein):

$$\left(\sigma'_{11} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \tau'^2_{12} = \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \tau_{12}{}^2$$

$\Rightarrow$ Gleichung der Form $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$

$\Rightarrow$ alle äquivalenten Kombinationen aus Normal- und Schubspannungen liegen auf einem Kreis im $\sigma'_{11} - \tau'_{12}$ – Koordinatensystem

Konstruktion des Mohrschen Spannungskreises (2D):



Mohrscher Spannungskreis im Dreidimensionalen

Mit Hilfe von den drei gegebenen Hauptnormalspannungen ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) werden drei Mohrsche Spannungskreise konstruiert, deren Radien den drei möglichen Hauptscherspannungen entsprechen:

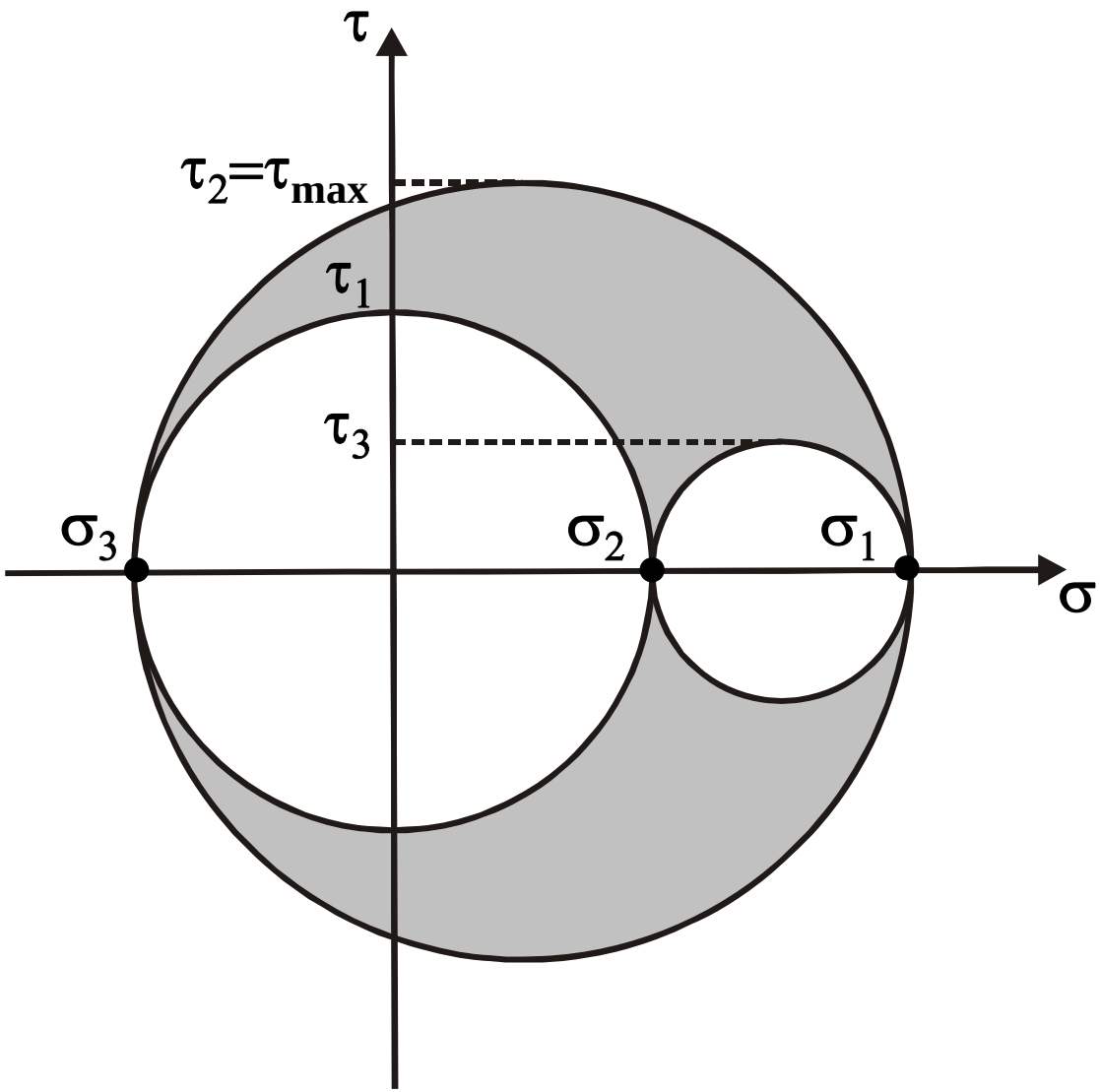
$$r_1 = \tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad r_2 = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad r_3 = \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Die Mittelpunkte der Kreise liegen auf der Hauptspannungsachse:

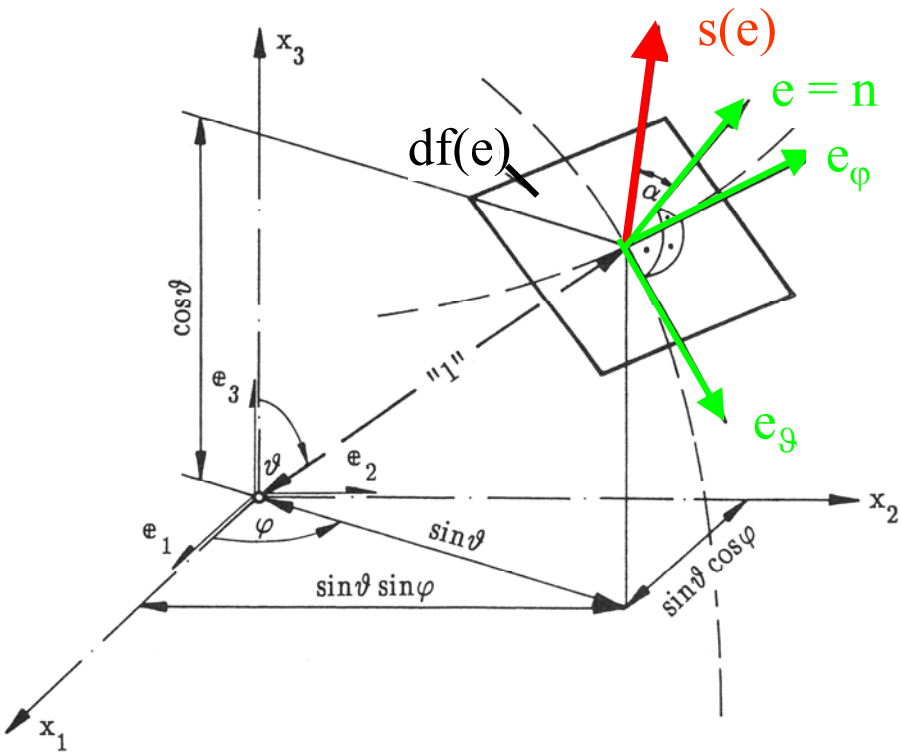
$$M_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \qquad M_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \qquad M_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

Beachte: Im Dreidimensionalen ersetzt die Konstruktion des Mohrschen Spannungskreises <u>nicht</u> die Hauptachsentransformation!!!

Konstruktion der Mohrschen Spannungskreise (3D):



Darstellung eines Spannungsvektors $s(e)$ mit Hilfe der Mohrschen Spannungskreise:



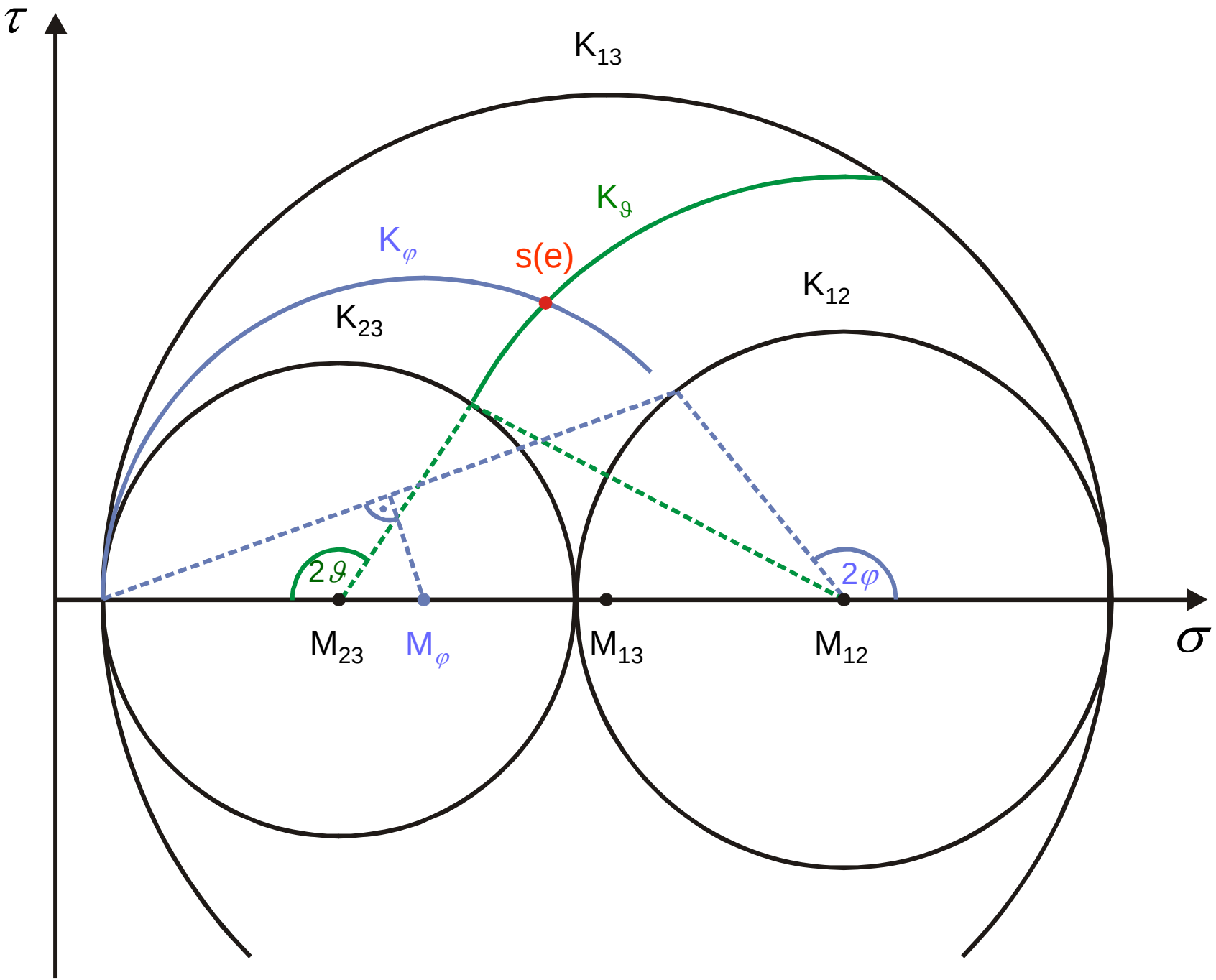
Flächenelement df(e) definiert durch:

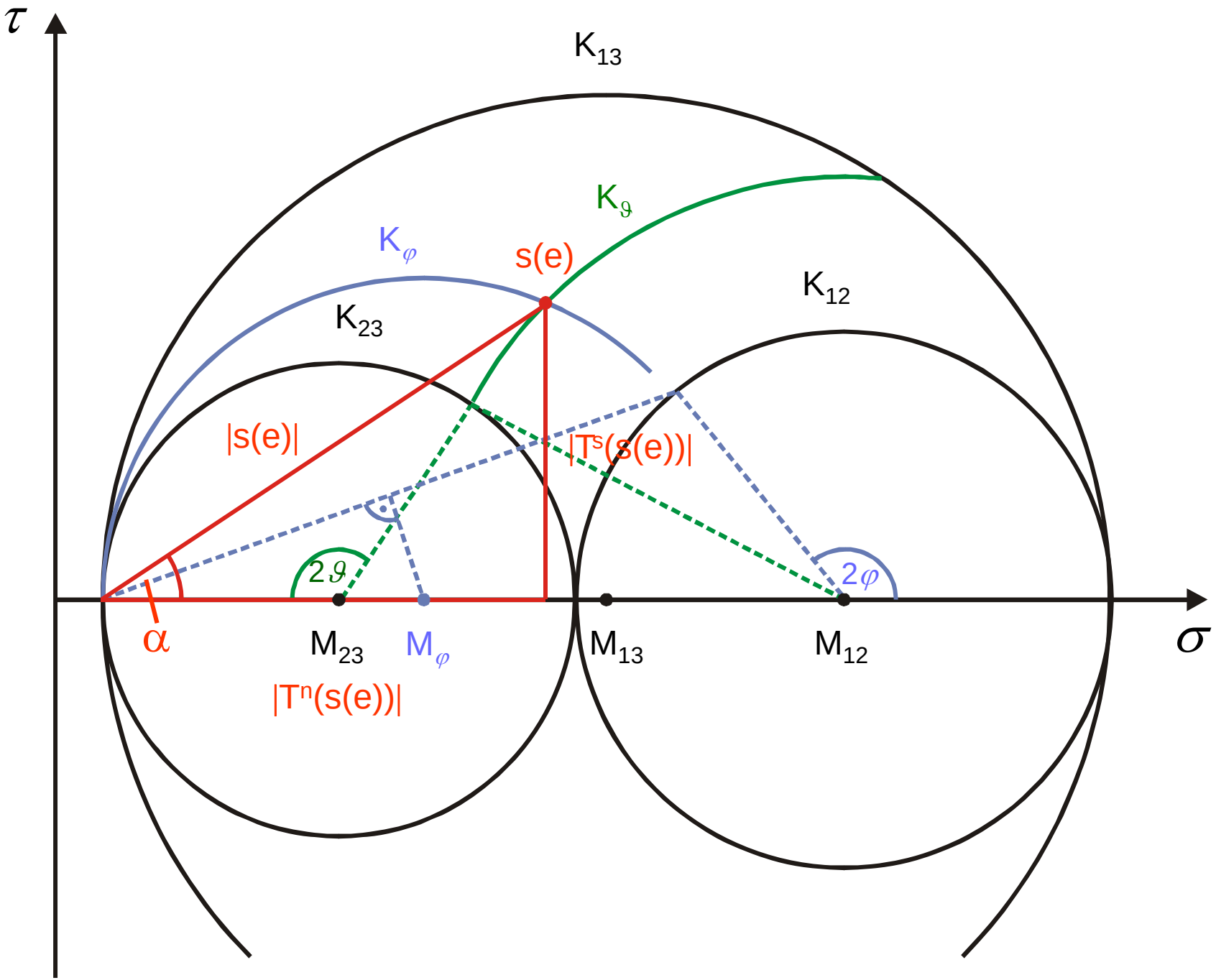
φ Meridianwinkel

ϑ Breitenkreiswinkel

und für das entsprechende Koordinatensystem ergibt sich :

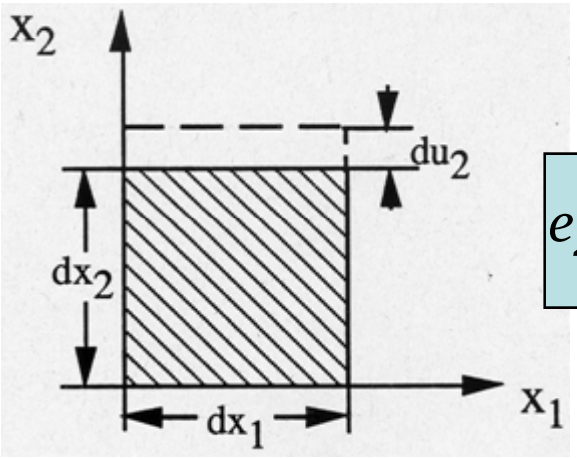
$$e(\varphi,\vartheta)=\{\sin\vartheta\cos\varphi;\sin\vartheta\sin\varphi;\cos\vartheta\},$$
$$e_\varphi(\varphi,\vartheta)=\{-\sin\varphi;\cos\varphi;0\},$$
$$e_\vartheta(\varphi,\vartheta)=\{\cos\vartheta\cos\varphi;\cos\vartheta\sin\varphi;-\sin\vartheta\}$$


τ
K13
Kϑ
Kφ
s(e)
K12
K23
2ϑ
2φ
M23
Mφ
M13
M12
σ


τ
σ
K13
Kϑ
Kφ
s(e)
K12
K23
|s(e)|
|Ts(s(e))|
2ϑ
2φ
α
M23
Mφ
M13
M12
|Tn(s(e))|

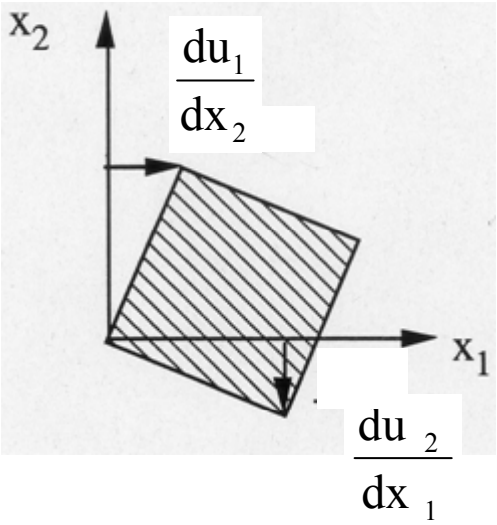
2.2 Verzerrungstensor

Dehnung

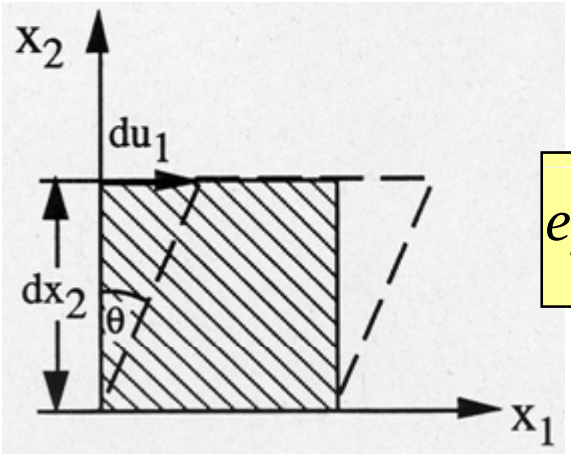


$$e_{22} = \frac{du_2}{dx_2}$$

aber: Rotation ist auszuschließen!



Scherung



$$e_{21} = \frac{du_1}{dx_2} \approx \theta$$

$$\frac{du_1}{dx_2} = -\frac{du_2}{dx_1}$$

2.2.1 Definition

Der Verzerrungstensor beschreibt den Verzerrungszustand in einem Punkt des Festkörpers vollständig. Er ist in dieser Form nur für kleine Verschiebungen definiert.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

mit u_i: i-Komponente der Verschiebung

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

„Dehnungen“: ε_{11}, ε_{22}, ε_{33}
„Scherungen“: ε_{12}, ε_{13}, ε_{23}, …

2.2.2 Besondere Verzerrungszustände

ebene Dehnung

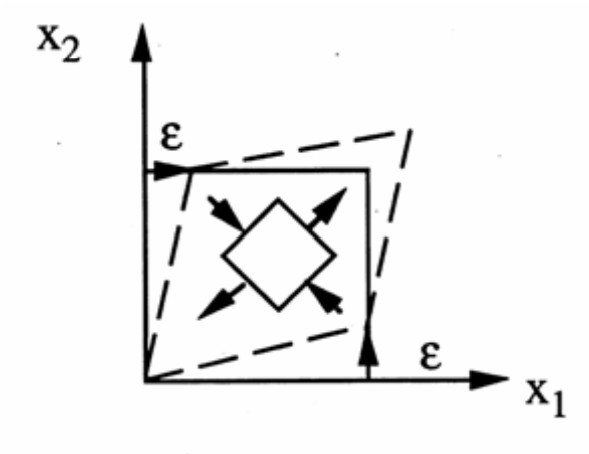
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

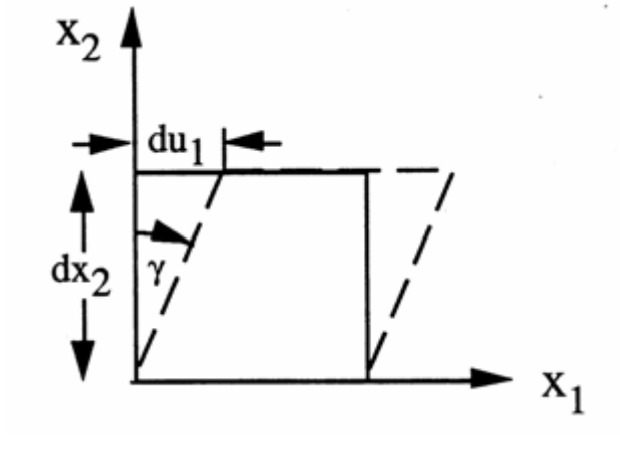
reine Scherung

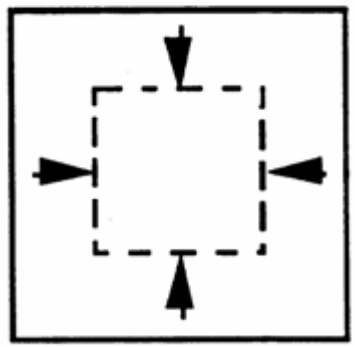
$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dilatation

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$







Technische Scherung ↔ Scherkomponente

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$$ (kein Tensor!)

2.2.3 Eigenschaften des Verzerrungstensors

1) symmetrisch: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ → 6 Komponenten

2) zerlegbar:

$$\varepsilon_{ij} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{pmatrix}}_{\text{Dilatator}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_m & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} - \varepsilon_m & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} - \varepsilon_m \end{pmatrix}}_{\text{Deviator}}$$

wobei $\varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$

„Dilatation“ (relative Volumenänderung):

$$\Delta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{\Delta V}{V}$$

3) Deviator ist immer zerlegbar in 5 reine Scherungen

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{23} \\ 0 & \varepsilon_{23} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

<u>Folge:</u>

Für beliebige Verformung sind 5 unabhängige Gleitsysteme nötig.

4) Ermittlung der Hauptdehnungen
analog Ermittlung der Hauptspannungen,
d.h. Lösung des Eigenwertproblems.

$$det\left(\varepsilon_{ij} - \lambda E\right) = 0$$

Die Wurzeln λ_i des Polynoms entsprechen den drei Hauptdehnungen ε_1, ε_2, und ε_3.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Im *elastisch isotropen* Feskörper fallen die Haupt*spannungs*- und die Haupt*dehnungs*achsen zusammen!

2.3 Allgemeines Hookesches Gesetz

2.3.1 Tensorschreibweise des Allgemeinen Hookeschen Gesetzes

Das Allgemeine Hookesche Gesetz beschreibt den allgemeinsten linearen Zusammenhang zwischen Spannung (*Spannungstensor*) und Verzerrung (*Verzerrungstensor*):

$$\boxed{\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}} \qquad \boxed{\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \cdot \sigma_{kl}}$$

σ_{ij}:	Spannungstensor	(Tensor 2. Stufe)
ε_{kl}:	Verzerrungstensor	(Tensor 2. Stufe)
C_{ijkl}:	Steifigkeitstensor (auch: Elastizitätstensor)	(Tensor 4. Stufe)
S_{ijkl}:	Nachgiebigkeitstensor	(Tensor 4. Stufe)

Vollständige Darstellung in Komponentenschreibweise:
(9x9 Hypermatrix mi 81 Komponenten)

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} \\ C_{1121} & C_{1122} & C_{1123} & C_{1221} & C_{1222} & C_{1223} & C_{1321} & C_{1322} & C_{1323} \\ C_{1131} & C_{1132} & C_{1133} & C_{1231} & C_{1232} & C_{1233} & C_{1331} & C_{1332} & C_{1333} \\ \hline C_{2111} & C_{2112} & C_{2123} & C_{2211} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2311} & C_{2312} & C_{2313} \\ C_{2121} & C_{2122} & C_{2123} & C_{2221} & C_{2222} & C_{2223} & C_{2321} & C_{2322} & C_{2323} \\ C_{2131} & C_{2132} & C_{2133} & C_{2231} & C_{2232} & C_{2233} & C_{2331} & C_{2332} & C_{2333} \\ \hline C_{3111} & C_{3112} & C_{3113} & C_{3211} & C_{3212} & C_{3213} & C_{3311} & C_{3312} & C_{3313} \\ C_{3121} & C_{3122} & C_{3123} & C_{3221} & C_{3222} & C_{3223} & C_{3321} & C_{3322} & C_{3323} \\ C_{3131} & C_{3132} & C_{3133} & C_{3231} & C_{3232} & C_{3233} & C_{3331} & C_{3332} & C_{3333} \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} S_{1111} & S_{1112} & S_{1113} & S_{1211} & S_{1212} & S_{1213} & S_{1311} & S_{1312} & S_{1313} \\ S_{1121} & S_{1122} & S_{1123} & S_{1221} & S_{1222} & S_{1223} & S_{1321} & S_{1322} & S_{1323} \\ S_{1131} & S_{1132} & S_{1133} & S_{1231} & S_{1232} & S_{1233} & S_{1331} & S_{1332} & S_{1333} \\ \hline S_{2111} & S_{2112} & S_{2113} & S_{2211} & S_{2212} & S_{2213} & S_{2311} & S_{2312} & S_{2313} \\ S_{2121} & S_{2122} & S_{2123} & S_{2221} & S_{2222} & S_{2223} & S_{2321} & S_{2322} & S_{2323} \\ S_{2131} & S_{2132} & S_{2133} & S_{2231} & S_{2232} & S_{2233} & S_{2331} & S_{2332} & S_{2333} \\ \hline S_{3111} & S_{3112} & S_{3113} & S_{3211} & S_{3212} & S_{3213} & S_{3311} & S_{3312} & S_{3313} \\ S_{3121} & S_{3122} & S_{3123} & S_{3221} & S_{3222} & S_{3223} & S_{3321} & S_{3322} & S_{3323} \\ S_{3131} & S_{3132} & S_{3133} & S_{3231} & S_{3232} & S_{3233} & S_{3331} & S_{3332} & S_{3333} \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Spannungstensor und Verzerrungstensor sind symmetrisch. Deshalb gilt für die Komponenten des Steifigkeitstensors und des Nachgiebigkeitstensors

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$$

bzw.

$$S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk} = S_{jilk}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ & & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} \\ & C_{1122} & C_{1123} \\ & & C_{1133} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} \\ & C_{1222} & C_{1223} \\ & & C_{1233} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} \\ & C_{1322} & C_{1323} \\ & & C_{1333} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} C_{2211} & C_{2212} & C_{2213} \\ & C_{2222} & C_{2223} \\ & & C_{2233} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_{2311} & C_{2312} & C_{2313} \\ & C_{2322} & C_{2323} \\ & & C_{2333} \end{pmatrix} \\ & & \begin{pmatrix} C_{3311} & C_{3312} & C_{3313} \\ & C_{3322} & C_{3323} \\ & & C_{3333} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ & & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Die Tensormultiplikation führt zu neun linearen Gleichungen der folgenden Form:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1112}\varepsilon_{12} + C_{1113}\varepsilon_{13} + C_{1121}\varepsilon_{21} + C_{1122}\varepsilon_{22} + \\ &\quad + C_{1123}\varepsilon_{23} + C_{1131}\varepsilon_{31} + C_{1132}\varepsilon_{32} + C_{1133}\varepsilon_{33} \\ \sigma_{12} &= C_{1211}\varepsilon_{11} + C_{1212}\varepsilon_{12} + C_{1213}\varepsilon_{13} + C_{1221}\varepsilon_{21} + C_{1222}\varepsilon_{22} + \\ &\quad + C_{1223}\varepsilon_{23} + C_{1231}\varepsilon_{31} + C_{1232}\varepsilon_{32} + C_{1233}\varepsilon_{33}\end{aligned}$$

usw.

Unter Berücksichtigung der Symmetriebedingungen ergibt sich für die sechs unabhängigen Komponenten des Spannungstensors:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1122}\varepsilon_{22} + C_{1133}\varepsilon_{33} + C_{1123}(2\varepsilon_{23}) + C_{1113}(2\varepsilon_{13}) + C_{1112}(2\varepsilon_{12}) \\ \sigma_{22} &= C_{2211}\varepsilon_{11} + C_{2222}\varepsilon_{22} + C_{2233}\varepsilon_{33} + C_{2223}(2\varepsilon_{23}) + C_{2213}(2\varepsilon_{13}) + C_{2212}(2\varepsilon_{12}) \\ \sigma_{33} &= C_{3311}\varepsilon_{11} + C_{3322}\varepsilon_{22} + C_{3333}\varepsilon_{33} + C_{3323}(2\varepsilon_{23}) + C_{3313}(2\varepsilon_{13}) + C_{3312}(2\varepsilon_{12}) \\ \sigma_{23} &= C_{2311}\varepsilon_{11} + C_{2322}\varepsilon_{22} + C_{2333}\varepsilon_{33} + C_{2323}(2\varepsilon_{23}) + C_{2313}(2\varepsilon_{13}) + C_{2312}(2\varepsilon_{12}) \\ \sigma_{13} &= C_{1311}\varepsilon_{11} + C_{1322}\varepsilon_{22} + C_{1333}\varepsilon_{33} + C_{1323}(2\varepsilon_{23}) + C_{1313}(2\varepsilon_{13}) + C_{1312}(2\varepsilon_{12}) \\ \sigma_{12} &= C_{1211}\varepsilon_{11} + C_{1222}\varepsilon_{22} + C_{1233}\varepsilon_{33} + C_{1223}(2\varepsilon_{23}) + C_{1213}(2\varepsilon_{13}) + C_{1212}(2\varepsilon_{12})\end{aligned}$$

2.3.2 Kontrahierte Notation nach Voigt („Voigtsche Vereinfachung“)

Der Spannungstensor lässt sich durch einen sechskomponentigen Vektor repräsentieren (dabei geht keine Information verloren).

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{1} \\ \sigma_{2} \\ \sigma_{3} \\ \sigma_{4} \\ \sigma_{5} \\ \sigma_{6} \end{pmatrix}$$

In ähnlicher Weise wird ein sechskomponentiger Verzerrungsvektor definiert:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1} \\ \varepsilon_{2} \\ \varepsilon_{3} \\ \varepsilon_{4} \\ \varepsilon_{5} \\ \varepsilon_{6} \end{pmatrix}$$

Das Allgemeine Hookesche Gesetz erhält mit der Voigtschen Notation folgende Form:

$$\sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 + C_{14}\varepsilon_4 + C_{15}\varepsilon_5 + C_{16}\varepsilon_6$$
$$\sigma_2 = C_{21}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3 + C_{24}\varepsilon_4 + C_{25}\varepsilon_5 + C_{26}\varepsilon_6$$
$$\sigma_3 = C_{31}\varepsilon_1 + C_{32}\varepsilon_2 + C_{33}\varepsilon_3 + C_{34}\varepsilon_4 + C_{35}\varepsilon_5 + C_{36}\varepsilon_6$$
$$\sigma_4 = C_{41}\varepsilon_1 + C_{42}\varepsilon_2 + C_{43}\varepsilon_3 + C_{44}\varepsilon_4 + C_{45}\varepsilon_5 + C_{46}\varepsilon_6$$
$$\sigma_5 = C_{51}\varepsilon_1 + C_{52}\varepsilon_2 + C_{53}\varepsilon_3 + C_{54}\varepsilon_4 + C_{55}\varepsilon_5 + C_{56}\varepsilon_6$$
$$\sigma_6 = C_{61}\varepsilon_1 + C_{62}\varepsilon_2 + C_{63}\varepsilon_3 + C_{64}\varepsilon_4 + C_{65}\varepsilon_5 + C_{66}\varepsilon_6$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}$$

Durch Koeffizientenvergleich erkennt man

$$C_{1111} = C_{11} \;,\; C_{2211} = C_{21} \;,\; C_{3311} = C_{31} \;,\; C_{2311} = C_{41}$$

usw.

Die Voigtsche Steifigkeits*matrix* C_{ij} enthält die gleiche Information über die elastischen Eigenschaften des Festkörpers wie der Steifigkeits*tensor*.
Die Steifigkeits*matrix* besitzt jedoch <u>keine</u> Tensoreigenschaften.

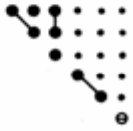
Die Steifigkeitsmatrix enthält 36 Komponenten.

Auch die Steifigkeitsmatrix ist symmetrisch, d.h. es gilt: $C_{ij} = C_{ji}$.
Dadurch vermindert sich die Anzahl der <u>unabhängigen</u> Komponenten der Matrix auf 21.

$\Rightarrow$ Im allgemeinsten Fall werden zur Beschreibung des linear-elastischen Verhaltens eines Festkörpers 21 elastische Konstanten benötigt.

Aufgrund der Kristallsymmetrie des Festkörpers wird die Anzahl der <u>unabhängigen</u> Konstanten reduziert.

triklin	21
monoklin	13
orthorhombisch	9
tetragonal	6
hexagonal	**5**
kubisch	**3**
isotrop	**2**

Kristall-system	Kristall-klasse	Form der C_{ij} - Matrix bzw S_{ij} - Matrix	Zahl der unabhängigen Komponenten	Kristall-system	Kristall-klasse	Form der C_{ij} - Matrix bzw S_{ij} - Matrix	Zahl der unabhängigen Komponenten
triklin	alle Klassen		21	tetragonal	4 (C_4) $\bar{4}$ (S_4) $4/m$ (C_{4h})		7
monoklin	alle Klassen		13		$4mm$ (C_{4v}) $\bar{4}2m$ (D_{2d}) 422 (D_4) $\frac{4}{m}mm$ (D_{4h})		6
rhombisch	alle Klassen		9	hexagonal	alle Klassen		5
trigonal	3 (C_3) $\bar{3}$ (C_{3i})		7	kubisch	alle Klassen		3
	32 (D_3) $3m$ (C_{3v}) $\bar{3}m$ (D_{3d})		6	isotrop			2

•	●	●—●	○—●	⊖	✦—●
$S_{ij} = 0$	$S_{ij} \neq 0$	$S_{ij} = S_{kl}$	$S_{kl} = -S_{ij}$	$S_{ij} = 2(S_{11} - S_{12})$	$S_{kl} = 2S_{ij}$
$C_{ij} = 0$	$C_{ij} \neq 0$	$C_{ij} = C_{kl}$	$C_{kl} = -C_{ij}$	$C_{ij} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$	$C_{kl} = C_{ij}$

Form der Matrix für die Elastizitätskonstanten bzw. -moduln der verschiedenen Kristallklassen. Die zur Hauptdiagonale symmetrischen Elemente wurden weggelassen.

2.3.3 Elastische Konstanten bei kubischer Symmetrie

Bei kubischer Symmetrie gilt:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33}$$
$$C_{44} = C_{55} = C_{66}$$
$$C_{12} = C_{13} = C_{23}$$

Die restlichen Komponenten der Steifigkeitsmatrix sind alle gleich null.

$$C_{ij}\Big|_{kub.} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}$$

Beziehungen zwischen C_{ij} und S_{ij}:

$$C_{11} = \frac{S_{11} + S_{12}}{(S_{11} - S_{12})(S_{11} + 2S_{12})}, \quad S_{11} = \frac{C_{11} + C_{12}}{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})}$$

$$C_{12} = \frac{-S_{12}}{(S_{11} - S_{12})(S_{11} + 2S_{12})}, \quad S_{12} = \frac{-C_{12}}{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})}$$

$$C_{44} = \frac{1}{S_{44}}, \quad S_{44} = \frac{1}{C_{44}}$$

$$C_{11} - C_{12} = \frac{1}{S_{11} - S_{12}}$$

$$C_{11} + 2C_{12} = \frac{1}{S_{11} + 2S_{12}}$$

Das linear-elastische Verhalten eines kubischen Kristalls lässt sich somit durch die Angabe von drei unabhängigen Konstanten (z.B. C_{11} , C_{12} und C_{44}) vollständig beschreiben.

Ein Maß für die Anisotropie eines kubischen Kristalls ist der **Anisotropiefaktor *A***, der wie folgt definiert ist:

$$\boxed{A = \frac{2C_{44}}{C_{11} - C_{12}} = \frac{2\left(S_{11} - S_{12}\right)}{S_{44}}}$$

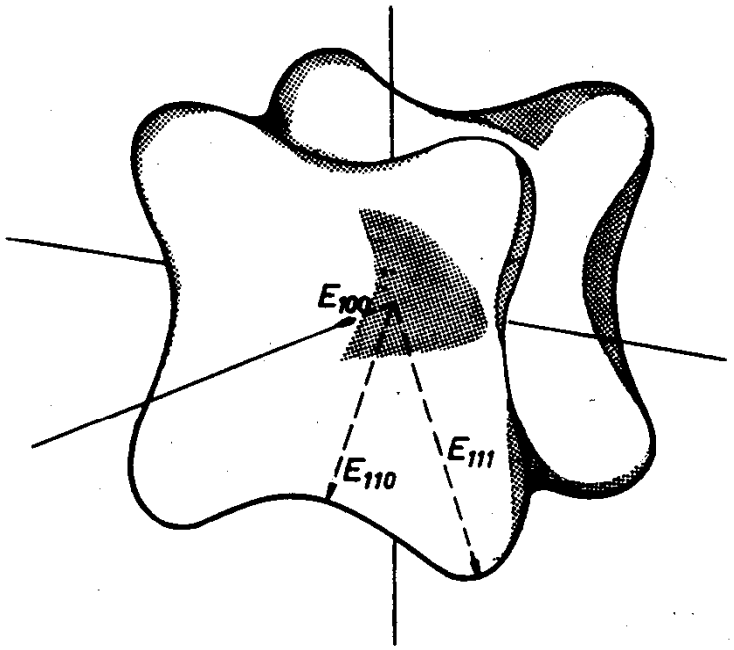
Je weiter A vom Wert 1 abweicht, umso ausgeprägter ist die Anisotropie des Kristalls.

Material	$E_{polycrystal}$	$E_{<111>}$	$E_{<100>}$	$E_{<100>}/E_{<111>}$
Al	70	76	64	0.84
Au	78	117	43	0.37
Cu	121	192	67	0.35
Fe(α)	209	276	129	0.47
W	411	411	411	1.00
Diamant	—	1200	1050	0.88
TiC	—	429	476	1.11
MgO	310	343	247	0.72
NaCl	37	32	44	1.38

$= 1/A$

Elastische Konstanten und Anisotropiefaktoren verschiedener kubischer Kristalle
Zahlenwerte in GPa (ermittelt an Einkristallen)

Material	C_{11} [GPa]	C_{12} [GPa]	C_{44} [GPa]	A
Ag	124	93	46	2,9
Al	108	61	29	1,2
Au	186	157	42	2,9
Cu	168	121	75	3,2
α-Fe	233	124	117	2,1
Mo	460	176	110	0,8
Na	7,3	6,3	4,2	8,3
Ni	247	147	125	2,5
Pb	50	42	15	3,7
W	501	198	151	1,0
Si	166	64	80	1,6
C (Diamant)	1076	125	576	1,2
TiC	512	110	177	0,9
LiF	112	46	63	1,9
MgO	291	90	155	1,5
NaCl	49	13	13	0,7



Anisotropie des Elastizitätsmodul in einem Au-Kristall (Schematisch).

$$A = E_{111}/E_{100}$$

Bestimmung des E-Moduls in eine beliebige Richtung *d*:

Einachsiger Zug in Richtung *d*: σ_d

↓ Transformation in Kristallachsen

Spannungszustand in Kristallachsen: $\sigma_1 - \sigma_6$

↓ Hookesches Gesetz: $\varepsilon_i = S_{ij}\sigma_j$

Dehnungszustand in Kristallachsen: $\varepsilon_1 - \varepsilon_6$

↓ Rücktransformation

Dehnung in Richtung *d*: ε_d

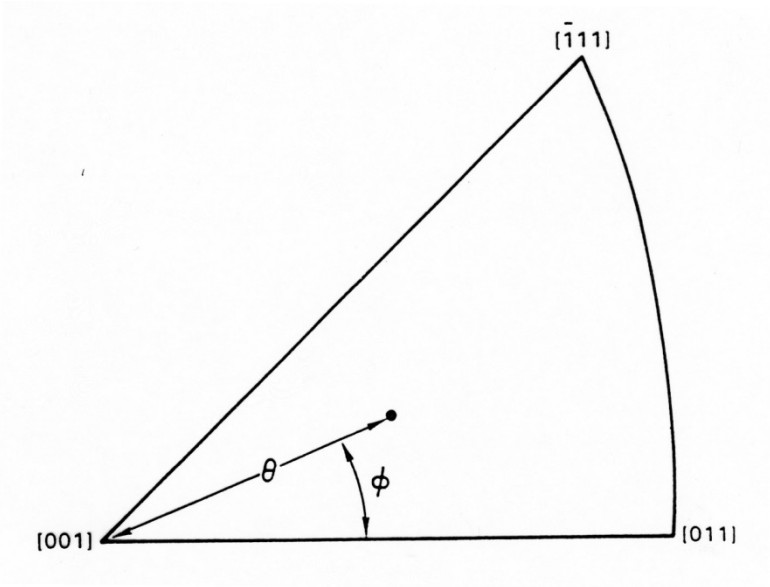
↓

E-Modul in Richtung *d*: $E_d = \sigma_d / \varepsilon_d$

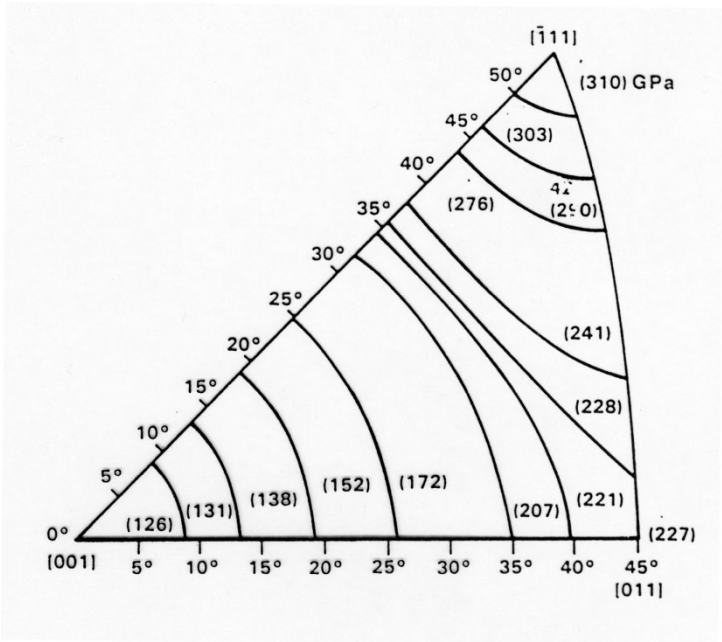
Anisotropie des E-Moduls:

$$\boxed{\frac{1}{E_{hkl}} = S_{11} - \left[2\left(S_{11} - S_{12}\right) - S_{44}\right] \cdot \left(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2\right)}$$

mit $\alpha = \cos([hkl],[100])$, $\beta = \cos([hkl],[010])$, $\gamma = \cos([hkl],[001])$

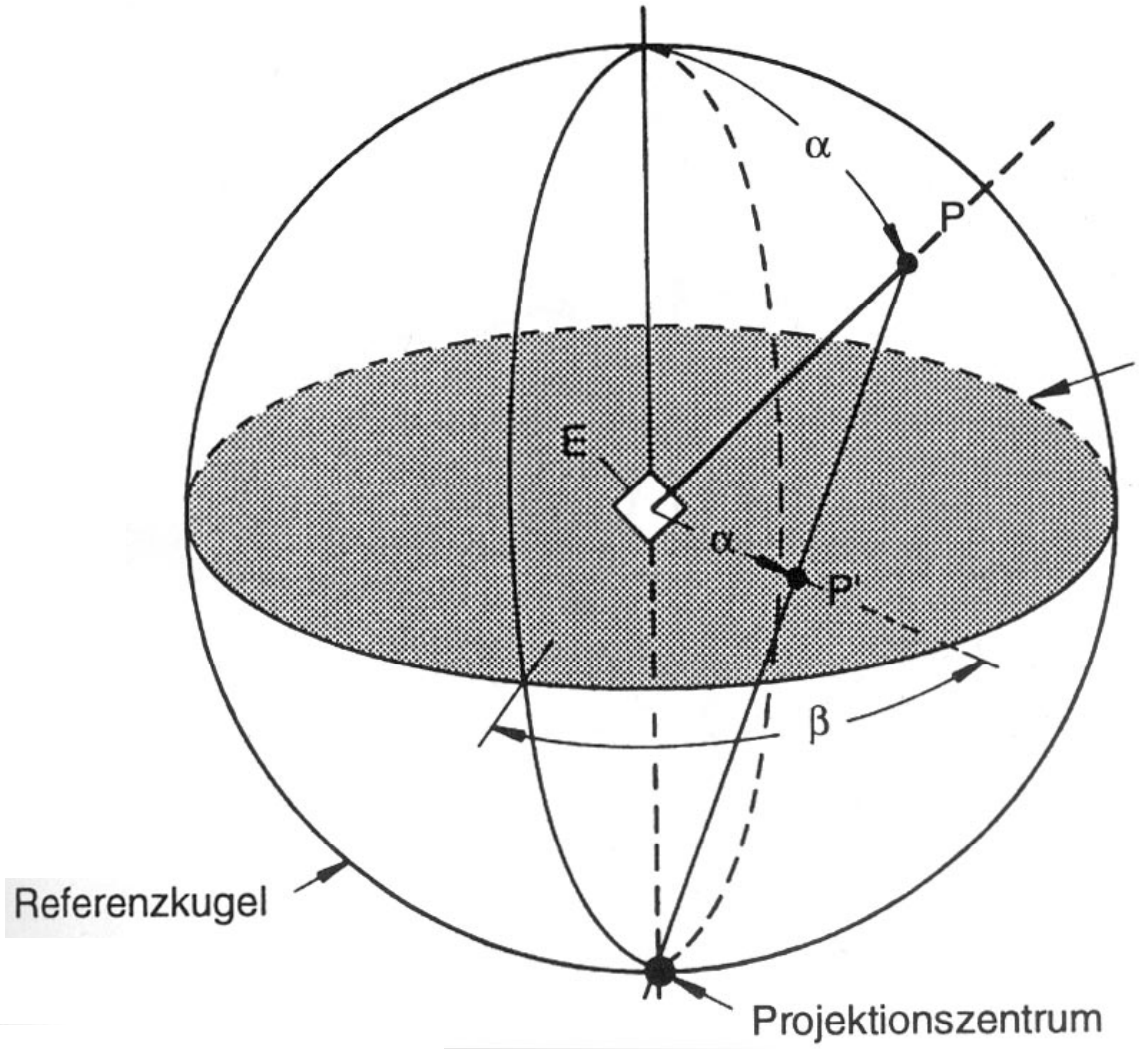


Standardorientierungsdreieck



Beispiel Ni-basis-Superlegierung (PWA 1480)

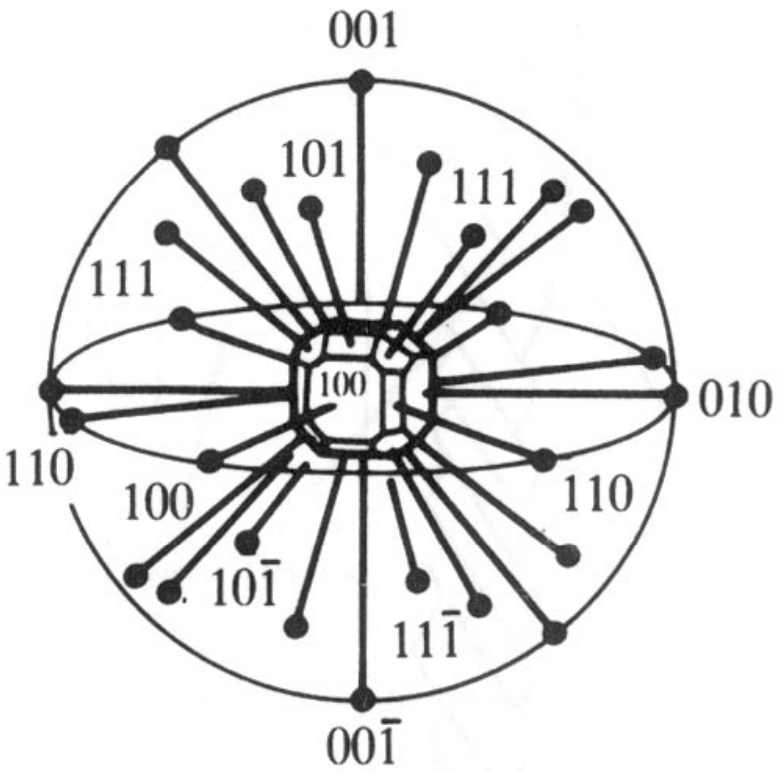
Stereographische Projektion

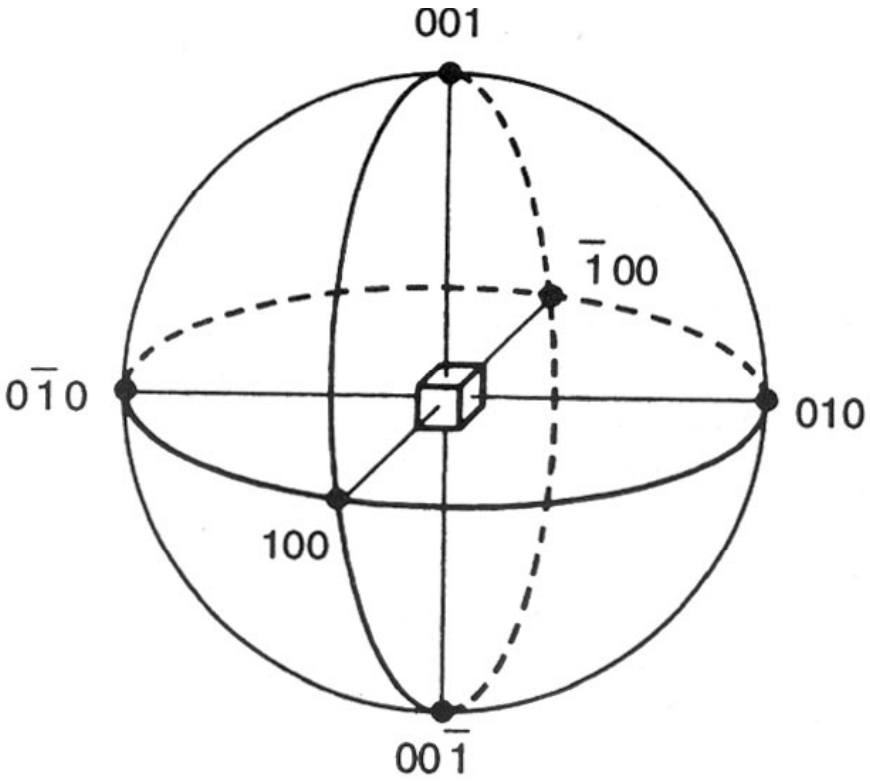


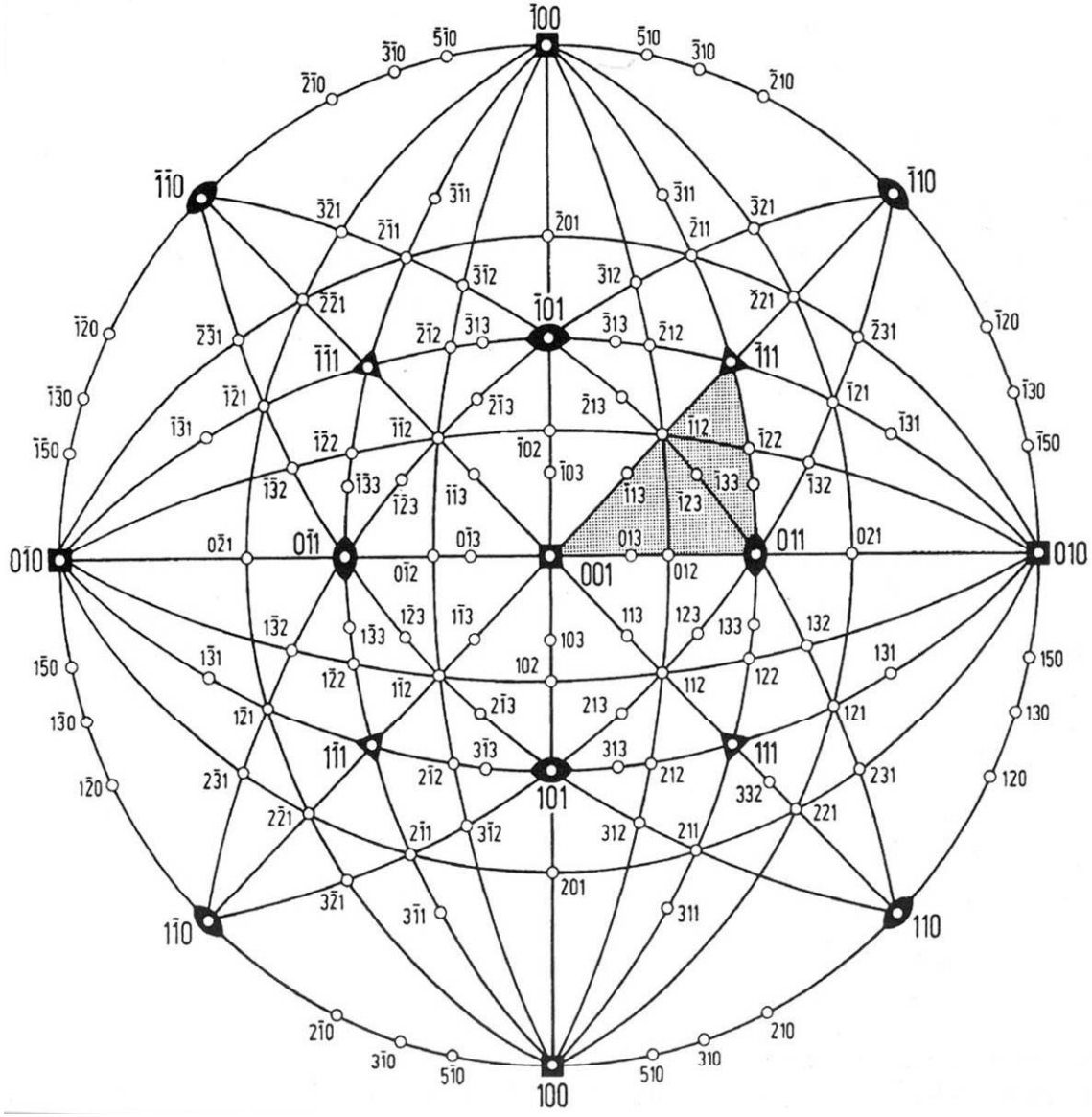
P = Pol, Schnittpunkt der Flächennormale mit der Polkugel/Referenzkugel

E = Einkristall

Standardprojektion



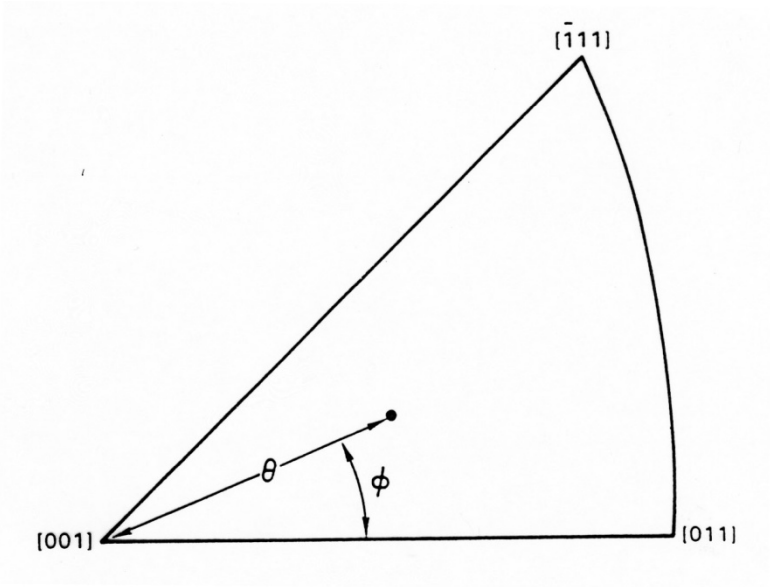



$\bar{1}00$
$\bar{1}\bar{1}0$
$\bar{1}10$
$\bar{1}01$
$\bar{1}\bar{1}1$
$\bar{1}11$
$0\bar{1}0$
$0\bar{1}1$
001
011
010
$1\bar{1}1$
111
101
$1\bar{1}0$
110
100

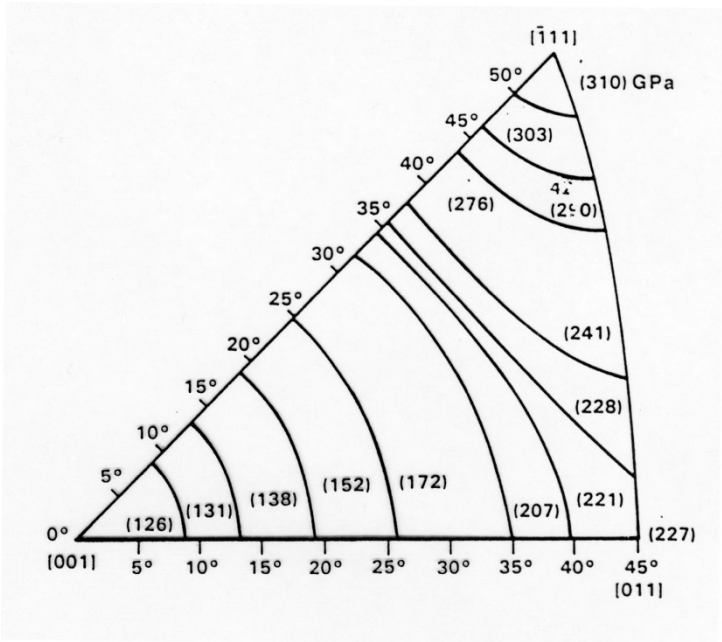
Anisotropie des E-Moduls:

$$\boxed{\frac{1}{E_{hkl}} = S_{11} - \left[2\left(S_{11} - S_{12}\right) - S_{44}\right] \cdot \left(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2\right)}$$

mit $\alpha = \cos([hkl],[100])$, $\beta = \cos([hkl],[010])$, $\gamma = \cos([hkl],[001])$



Standardorientierungsdreieck



Beispiel Ni-basis-Superlegierung (PWA 1480)

2.3.4 Elastische Konstanten bei hexagonaler Symmetrie

Bei hexagonaler Symmetrie gilt:

$$C_{11} = C_{22}\,,\; C_{44} = C_{55}$$

$$C_{13} = C_{23}\,,\; C_{66} = \frac{1}{2}\left(C_{11} - C_{12}\right)$$

Die restlichen Komponenten der Steifigkeitsmatrix sind alle gleich null.

$$C_{ij}\Big|_{hex.} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}$$

2.3.5 Elastische Konstanten bei Isotropie

Bei isotropem elastischen Verhalten sind die drei Konstanten C_{11} , C_{12} und C_{44} nicht mehr unabhängig voneinander.

Es gilt: $\boxed{C_{44} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \quad \Leftrightarrow \quad A = 1}$

Die drei Konstanten hängen unmittelbar mit dem Elastizitätsmodul E und der Poissonzahl ν zusammen:

$$C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{E}{1 - 2\nu^2 / (1-\nu)}$$

$$C_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$C_{44} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

$$C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{E}{1-2\nu^2/(1-\nu)}$$

$$C_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$C_{44} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

Die Konstante C_{11} ist identisch mit dem bereits in Kap. 1 hergeleiteten Modul für einachsige Dehnung. Die Konstante C_{44} entspricht dem Schermodul G.

Anmerkung: Polykristalline texturfreie Materialien weisen unabhängig von ihrer Kristallstruktur in der Regel ein isotropes elastisches Verhalten auf, dieses Verhalten nennt man „Quasi-Isotropie“.

2.3.6 „Quasi-Isotropie“ von Polykristallen

Das elastische Verhalten von Polykristallen ist zwar in jedem einzelnen Korn anisotrop, gemittelt über viele Körner ergibt sich jedoch ein „quasi-isotropes“ Verhalten. Für kubische Materialien lassen sich folgende Mittelwerte für den E-Modul und den Schubmodul berechnen:

<u>Voigt-Mittel</u> (Iso-Dehnung):

$$E_V = \frac{(C_{11} - C_{12} + 3C_{44})(C_{11} + 2C_{12})}{2C_{11} + 3C_{12} + C_{44}}, \quad G_V = \frac{1}{5}(C_{11} + 3C_{44} - C_{12})$$

<u>Reuss-Mittel</u> (Iso-Spannung):

$$E_R = \frac{5}{3S_{11} + 2S_{12} + S_{44}}, \quad G_R = \frac{5}{4S_{11} + 3S_{44} - 4S_{12}}$$

Im allgemeinen gilt:

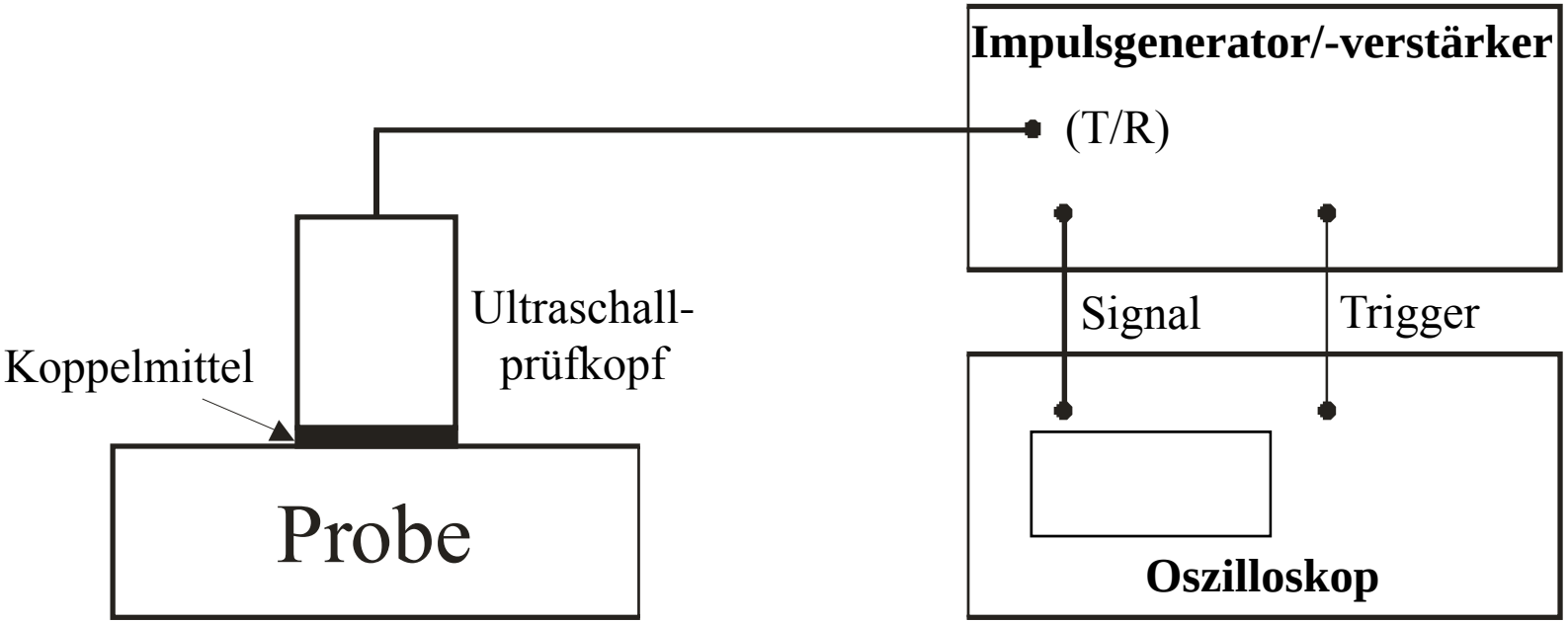
$$\boxed{E_R < E_{\exp} < E_V}$$

2.4 Experimentelle Bestimmung von elastischen Konstanten

Für die Bestimmung der elastischen Konstanten müssen so viele voneinander unabhängige Experimente durchgeführt werden, wie es unabhängige Konstanten gibt, also z.B. *5* bei hexagonalen Kristallen, *3* bei kubischen Kristallen und *2* bei isotropen Festkörpern.

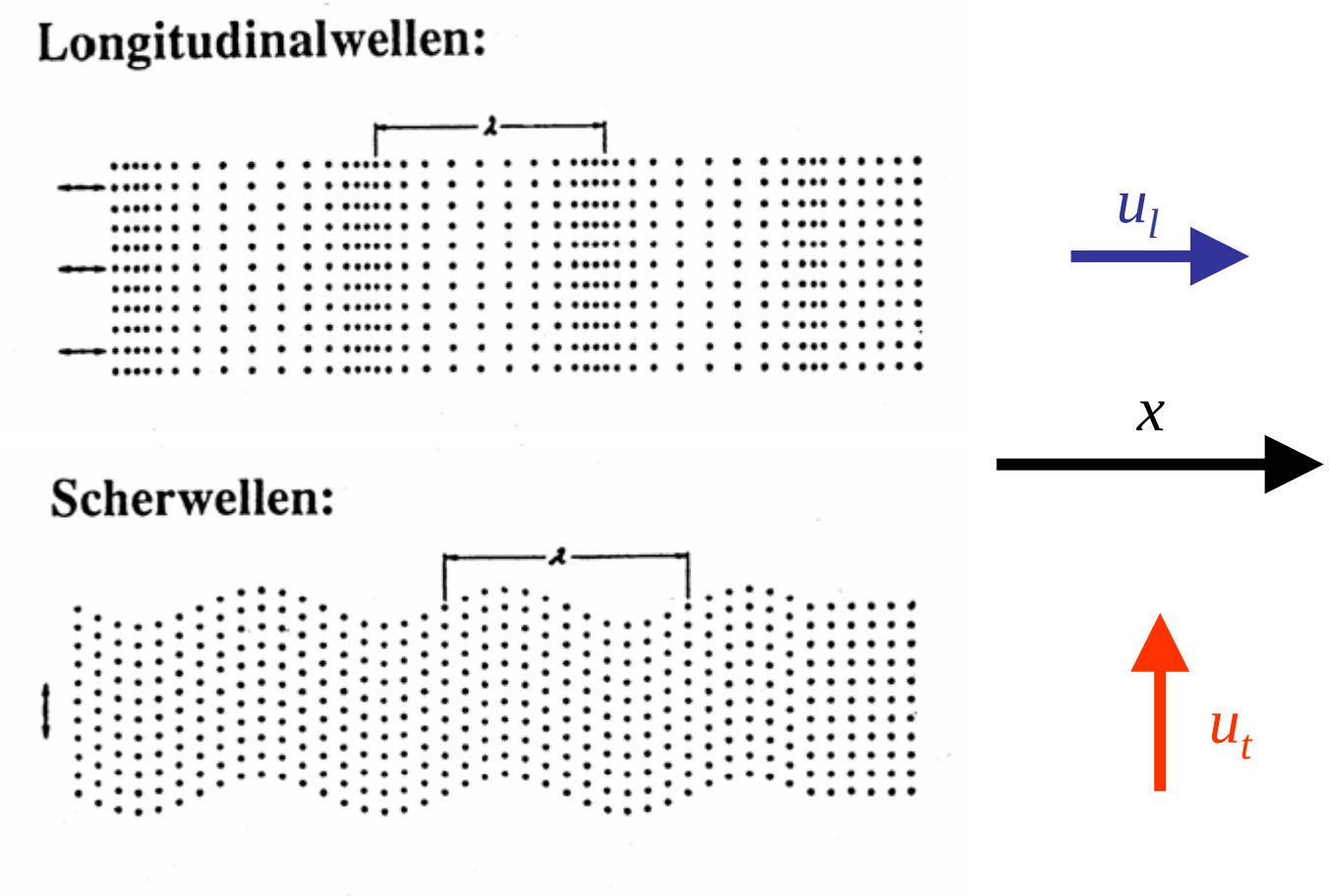
In der Regel wird das Ultraschallverfahren angewandt, bei dem an einem kleinen Probenkörper (ca. 1 cm^3) die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten verschiedenartig angeregter Schallwellen gemessen wird

Versuchsaufbau Ultraschallmessung:



$$c = \frac{2l_p}{t_p}$$

c Schallgeschwindigkeit, l_p Probendicke, l_p Laufzeit



Man unterscheidet zwischen *Longitudinalwellen* (Auslenkung *u* parallel zur Fortpflanzungsrichtung *x*) und *Scher- bzw. Transversalwellen* (Auslenkung senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung).

Isotrope Materialien

Im einfachsten Fall, d.h. bei einem **isotropen** Festkörper, genügt zur vollständigen Charakterisierung die Messung der **transversalen Schallgeschwindigkeit c_T** und der **longitudinalen Schallgeschwindigkeit c_L** in jeweils beliebiger Raumrichtung.

Ist die **Dichte ρ** des untersuchten Festkörpers bekannt, so lassen sich die elastischen Konstanten aus folgenden Gleichungen berechnen (gilt so nur bei Isotropie!):

$$c_L = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

$$c_T = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}\frac{1}{2(1+\nu)}}$$

Anisotrope Materialien

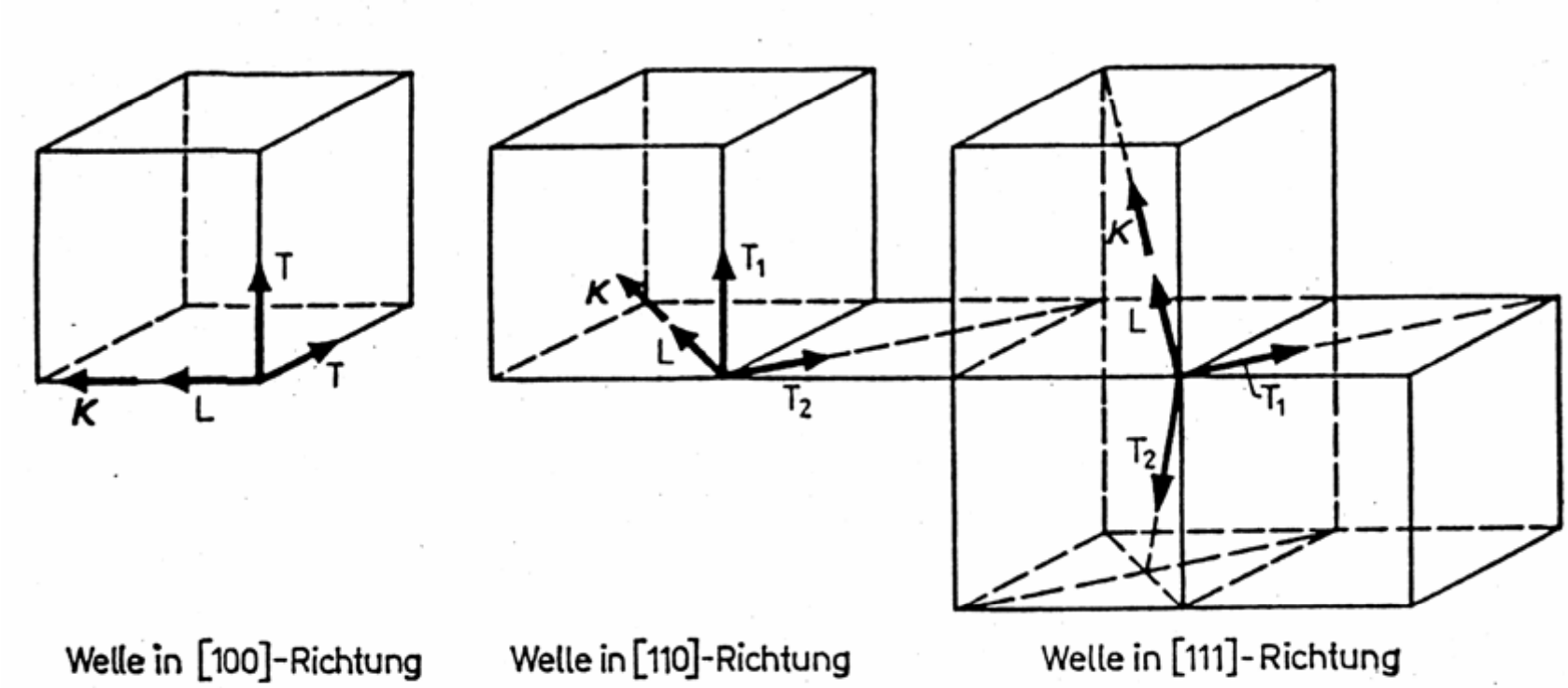
Zur Bestimmung der elastischen Konstanten von **anisotropen Kristallen** müssen Schallgeschwindigkeitsmessungen **an einkristallinen Proben** in **verschiedenen definierten Gitterrichtungen** durchgeführt werden.

Für genauere Erläuterungen zu diesem Thema wird auf einschlägige Lehrbücher verwiesen, z.B.

K.-H. Hellwege, Einführung in die Festkörperphysik, Springer-Verlag.

Schallwellen in kubischen Kristallen

Eine Schallwelle ist eine elastische Welle. Sie wird charakterisiert durch die *Ausbreitungsrichtung* (Wellenzahlvektor K mit dem Betrag $2\pi/\lambda$) und die *Polarisation* (Auslenkungsrichtung u)



Verschiedene Wellenformen in einem kubischen Kristall.
L – longitudinal, T – transversal.

K parallel zu	***u*** parallel zu	Typ	Ausbreitungs-geschwindigkeit
$[100]$	$[100]$	longitudinal	$c_L = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$
$[100]$	$[010]$ $[001]$	transversal	$c_T = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$
$[110]$	$[110]$	longitudinal	$c_L = \sqrt{\frac{C_{11}+C_{12}+2C_{44}}{2\rho}}$
$[110]$	$[001]$	transversal	$c_{T1} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$
$[110]$	$[1\bar{1}0]$	transversal	$c_{T2} = \sqrt{\frac{C_{11}-C_{12}}{2\rho}}$
$[111]$	$[111]$	longitudinal	$c_L = \sqrt{\frac{C_{11}+2C_{12}+4C_{44}}{3\rho}}$
$[111]$	$[1\bar{1}0]$ $[11\bar{2}]$	transversal	$c_T = \sqrt{\frac{C_{11}-C_{12}+C_{44}}{3\rho}}$