Festkörpermechanik/Organisation

- Gemeinsame Übungen zu den Vorlesungen „Einführung in die Werkstoffphysik“ und „Festkörpermechanik“:

  Zeit: Dienstags 14.45 – 16.15 Uhr, erstmalig am 28.10.2008
  Ort: Seminarraum 2P4
  Klausur: 04.02.2009, 14.45 – 16.15 Uhr

- Vorlesung jeweils 13.00 – 15.05 Uhr am 20.10., 27.10., 10.11., 17.11., 24.11., 01.12., 08.12. und 15.12.2007.

- Patric Gruber, Institut für Zuverlässigkeit von Bauteilen und Systemen, Universität Karlsruhe und Institut für Materialforschung II, Forschungszentrum Karlsruhe,
  patric.gruber@izbs.uni-karlsruhe.de
  Sprechzeit nach jeder Vorlesung

Bücher zum vertieften Studium

- G. E. Dieter, „Mechanical Metallurgy (SI metric edition)“
  McGraw-Hill Book Company, London/New York, 1988.
  ISBN 0-07-100406-8
- T. H. Courtney, „Mechanical Behavior of Materials“
  McGraw-Hill Publishing Company, New York, 1990.
  ISBN 0-07-100680-X
- A. Böge, „Mechanik und Festigkeitslehre“
  Verlag Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 22. Aufl., 1992.
  ISBN 3-528-94010-7
- R. Trostel, „Mathematische Grundlagen der Technischen Mechanik I: Vektor- und Tensoralgebra“
  Verlag Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1993.
  ISBN 3-528-06537-0

Festkörpermechanik

Dr. P. Gruber, Dr. A. Wanner und Prof. Dr. E. Arzt

Universität Stuttgart, WS 2008/09

Inhalt

1. Spannung, Dehnung und Scherung

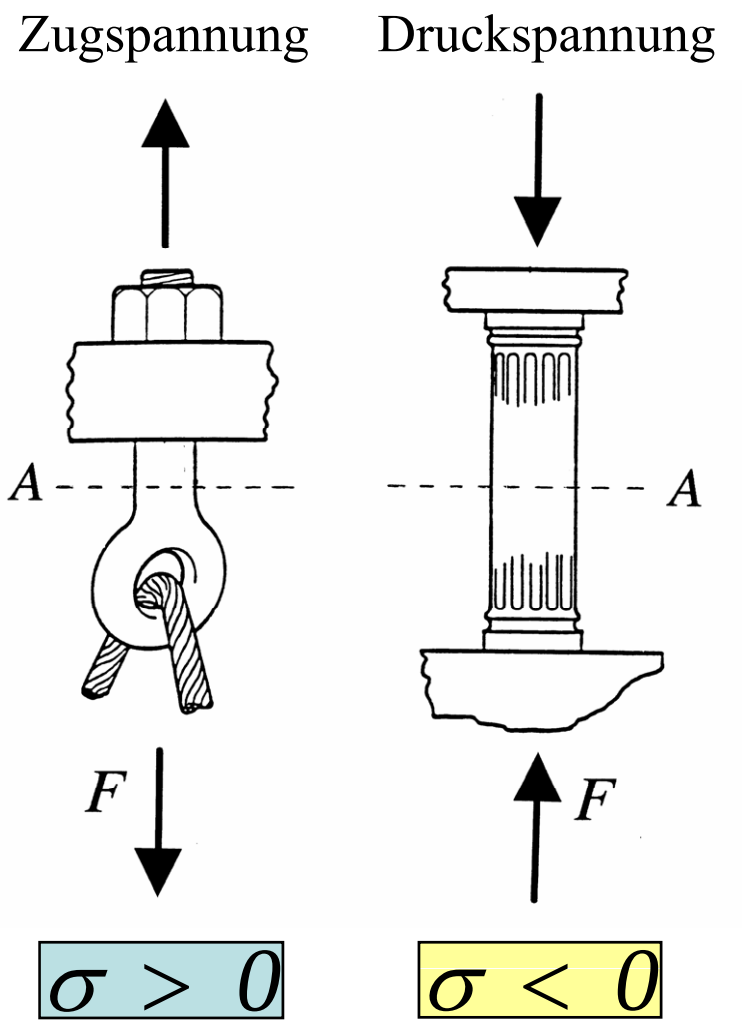
2. Allgemeine Spannungs- und Dehnungszustände

3. Mechanik heterogener Festkörper

4. Einfache Probleme der Technischen Mechanik

1 Spannung, Dehnung, Scherung

1.1 Normalspannung



$$\sigma = \frac{F}{A}$$

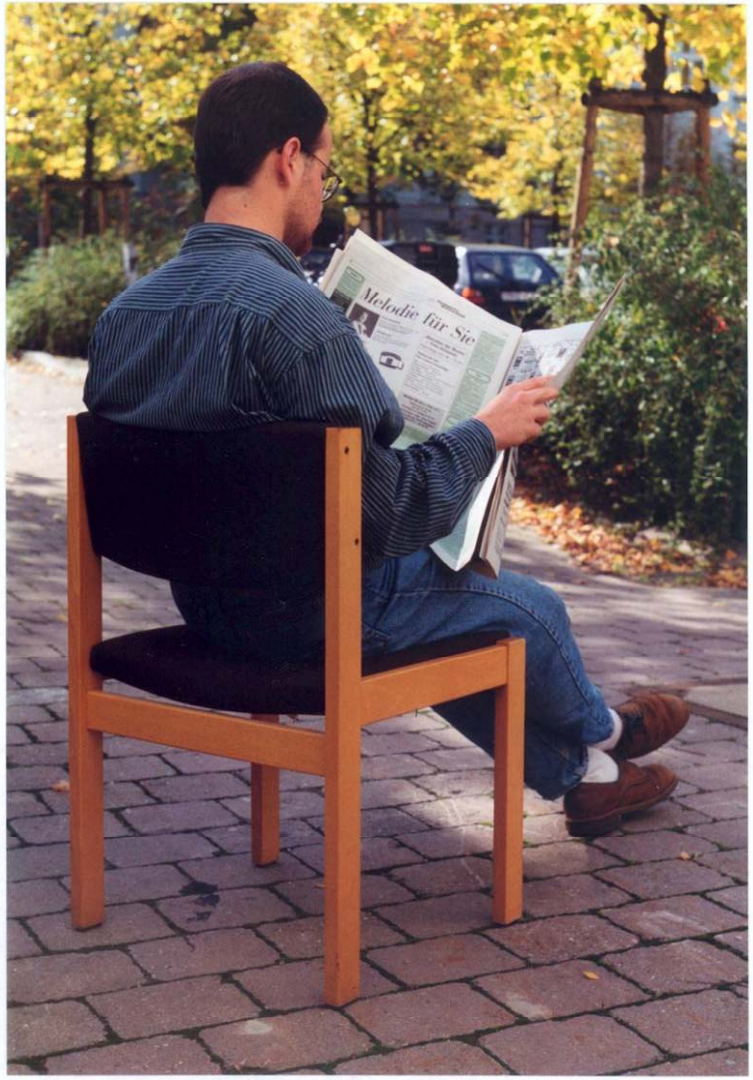
$$Spannung = \frac{Kraft}{Fläche}$$

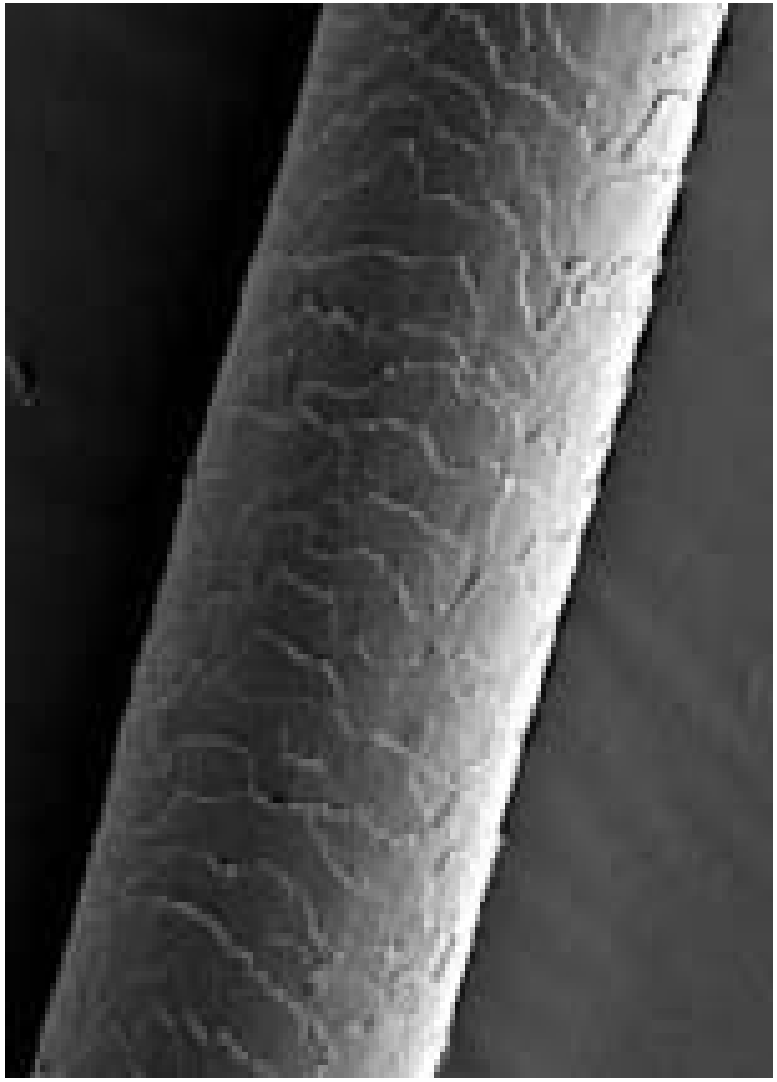
SI-Einheit der mechanischen Spannung: *Pascal*

$$[Pa] = \left[\frac{N}{m^2}\right]$$

$$1\,MPa = 10^6\,Pa = 1\,\frac{N}{mm^2}$$

Wie groß sind real auftretende Spannungen?



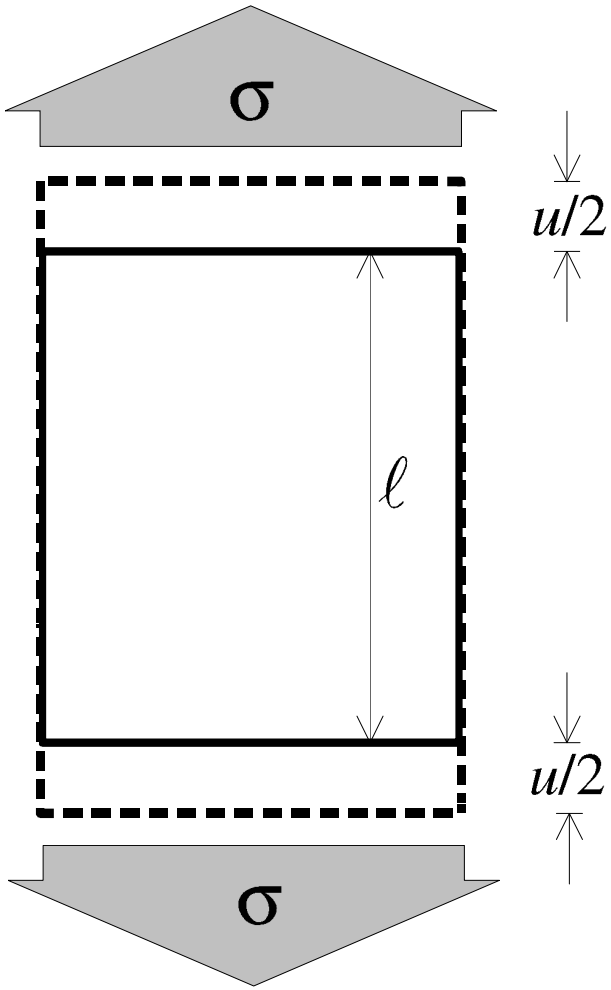


SI-Präfixe:

Präfix	Symbol	Multiplikationsfaktor
Tera	T	10^{12} = 1 000 000 000 000
Giga	G	10^{9} = 1 000 000 000
Mega	M	10^{6} = 1 000 000
Kilo	k	10^{3} = 1 000
Hecto	h	10^{2} = 100
Deka	da	10^{1} = 10
Deci	d	10^{-1} = 0,1
Centi	c	10^{-2} = 0,01
Milli	m	10^{-3} = 0,001
Micro	µ	10^{-6} = 0,000 001
Nano	n	10^{-9} = 0,000 000 001
Pico	p	10^{-12} = 0,000 000 000 001

Beachte: Die Benutzung der Präfixe hecto, deka, deci und centi wird im SI-System nicht empfohlen.

1.2 Dehnung



Dehnung: $$\varepsilon = \frac{u}{\ell}$$

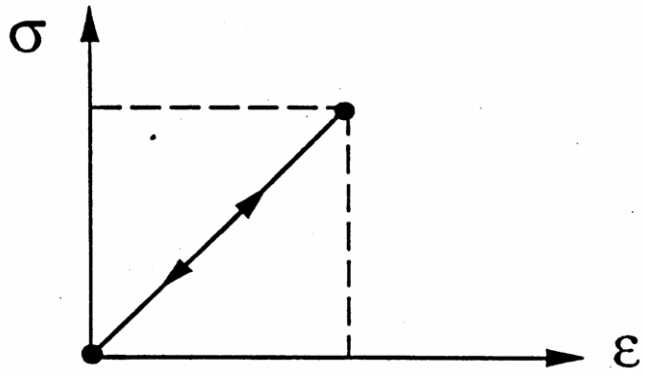
Die Dehnung ist **dimensionslos.**

Dehnung ist <u>Reaktion</u> des Materials auf angelegte Spannung → **materialabhängig**.

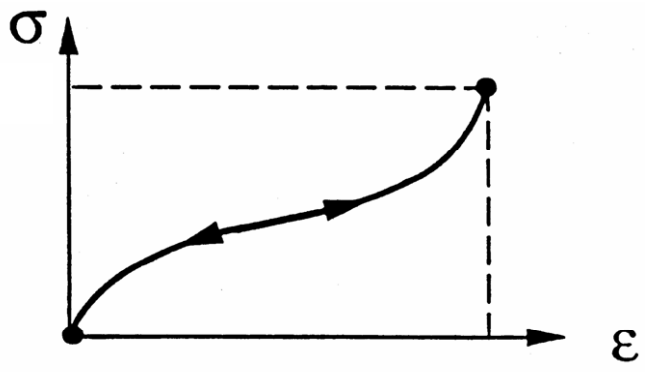
Spannung ist <u>nicht</u> materialabhängig, sondern nur durch **Kraft** und **Geometrie** bestimmt.

1.3 Spannungs-Dehnungs-Diagramm Elastizität und Plastizität

Spannung gegen Dehnung

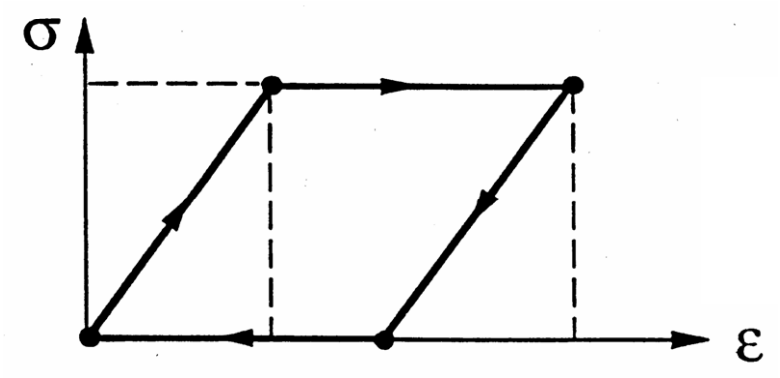


elastisch, linear
- reversibel
- kein Energieverlust

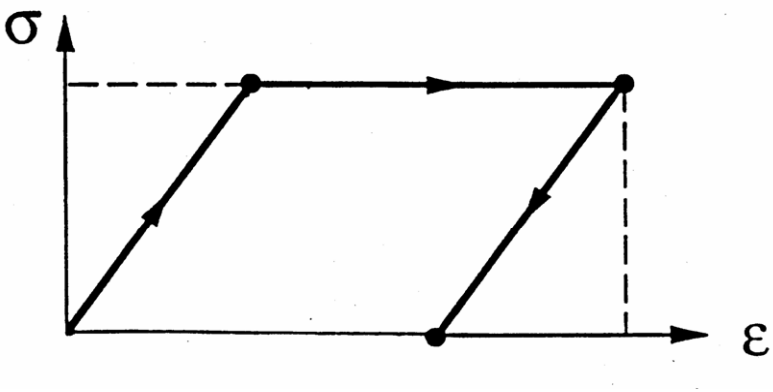


elastisch, nicht - linear
- reversibel
- kein Energieverlust

Spannung gegen Dehnung

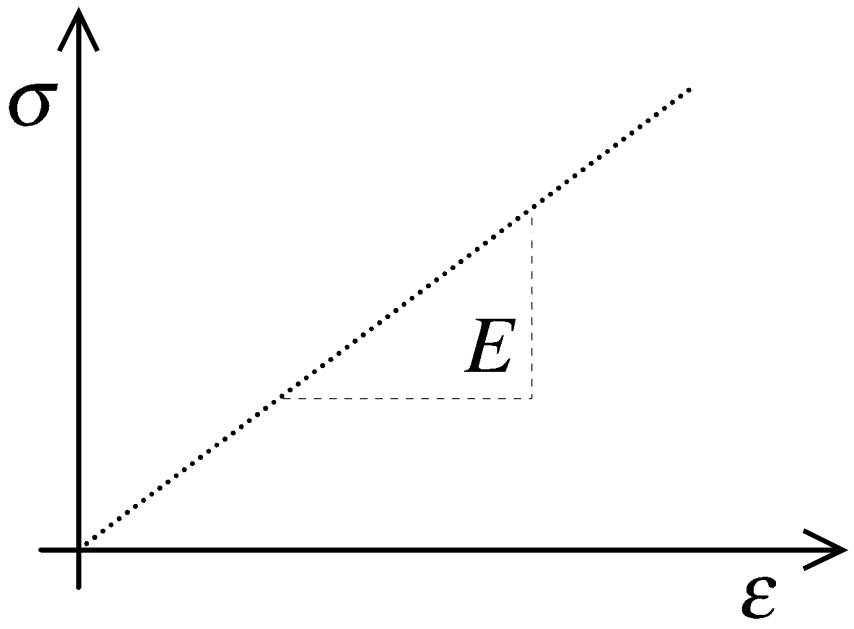


anelastisch
- reversibel
- Energieverlust



plastisch
- nicht reversibel
- Energieverlust

1.4 Lineare Elastizität
Hookesches Gesetz; Elastizitätsmodul



Hookesches Gesetz:
im linear-elastischen Bereich gilt

$$\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon}$$

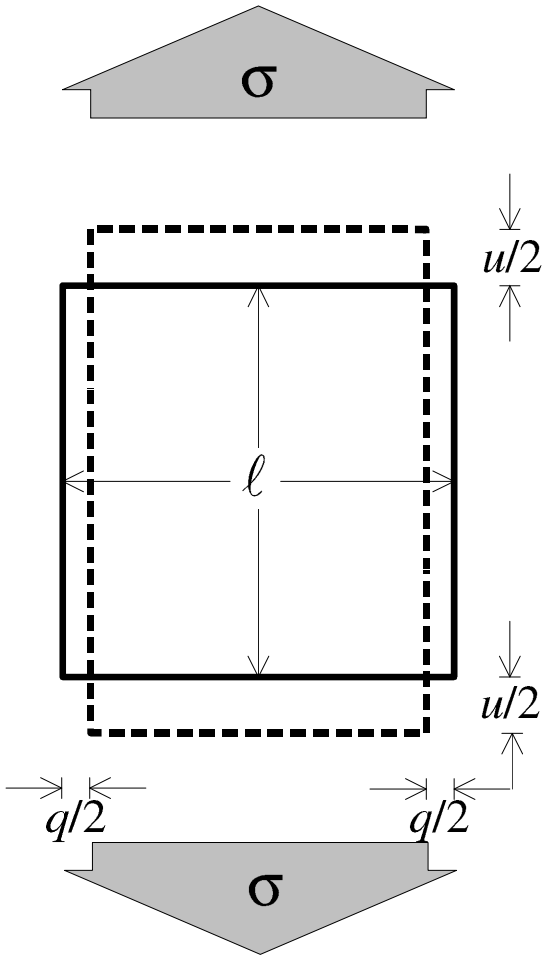
Elastizitätsmodul E:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad \frac{[\mathrm{Pa}]}{[-]} = [Pa]$$

Typische E-Modul-Werte

Material	**E-Modul [GPa]**
Diamant	1.000
Aluminiumoxid (Al_2O_3)	400
Eisen / Stähle	200
Aluminium	70
Fensterglas	70
Blei	14
Polyethylen	0,5
Schaumstoff	$\leq$ 0,1

1.5 Querkontraktion, Volumenänderung



Einachsige Spannung

Längsdehnung: $\varepsilon_1 = \frac{u}{\ell}$

Querkontraktion: $\varepsilon_2 = -\frac{q}{\ell}$

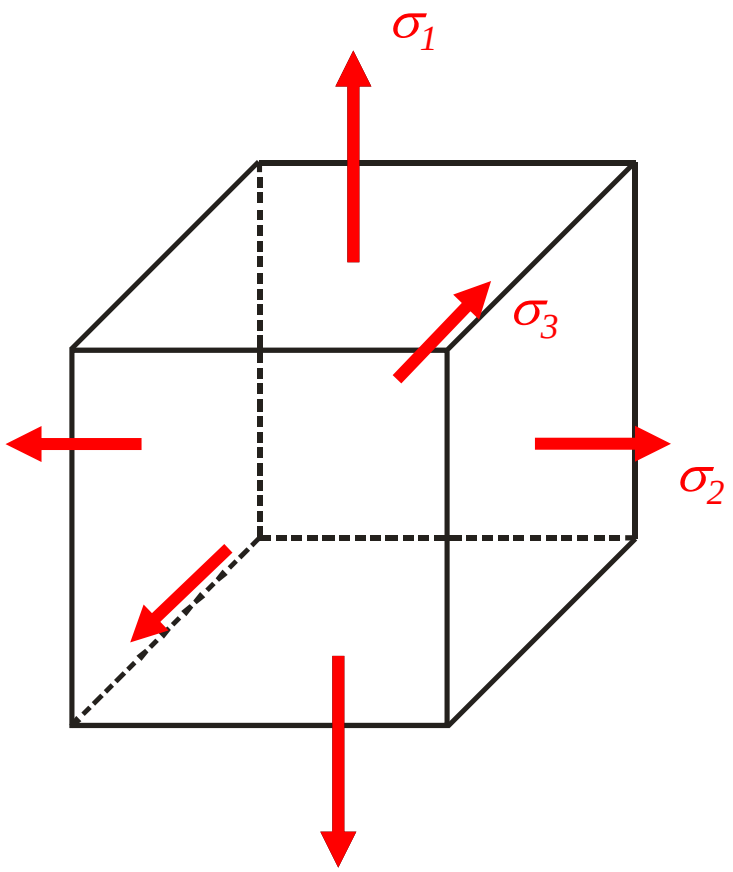
Poissonzahl: $\nu = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$

Näherung: $|\varepsilon_2| = |\varepsilon_3| \propto |\varepsilon_1|$

Querkontraktion: Zahlenwerte

Material		ν
Ag		0.38
Al		0.34
Au		0.42
Cu		0.34
Fe(a)		0.29
Ir		0.26
Ni		0.31
W		0.29
Si		0.27
Ge		0.28
TiC	**spröde**	0.19
MgO		0.19
Al_2O_3		0.23
Naturkautschuk	**weich**	0.49
Polyethylen		0.40
Polystyrol		0.33
Ar (bei 0K)		0.25

Allgemeines Hooksches Gesetz



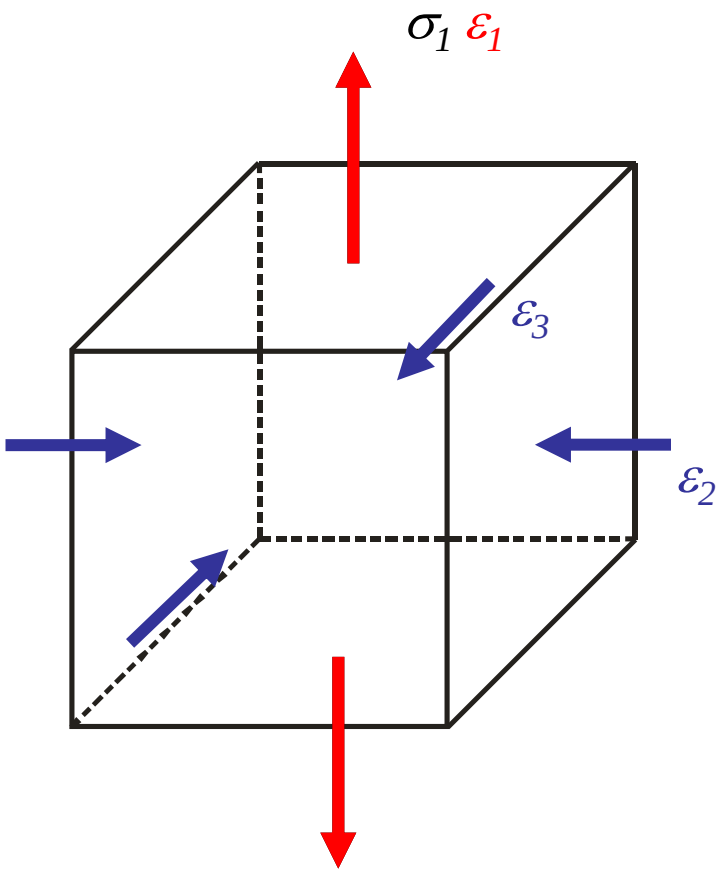
Betrachte Würfel unter Normalspannungen σ_1, σ_2 und σ_3

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_3}{E}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_3}{E} - \nu\frac{\sigma_1}{E}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \nu\frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E}$$

Spezialfall 1: Einachsige Spannung



Spannungen:

$$\sigma_1 \neq 0$$
$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

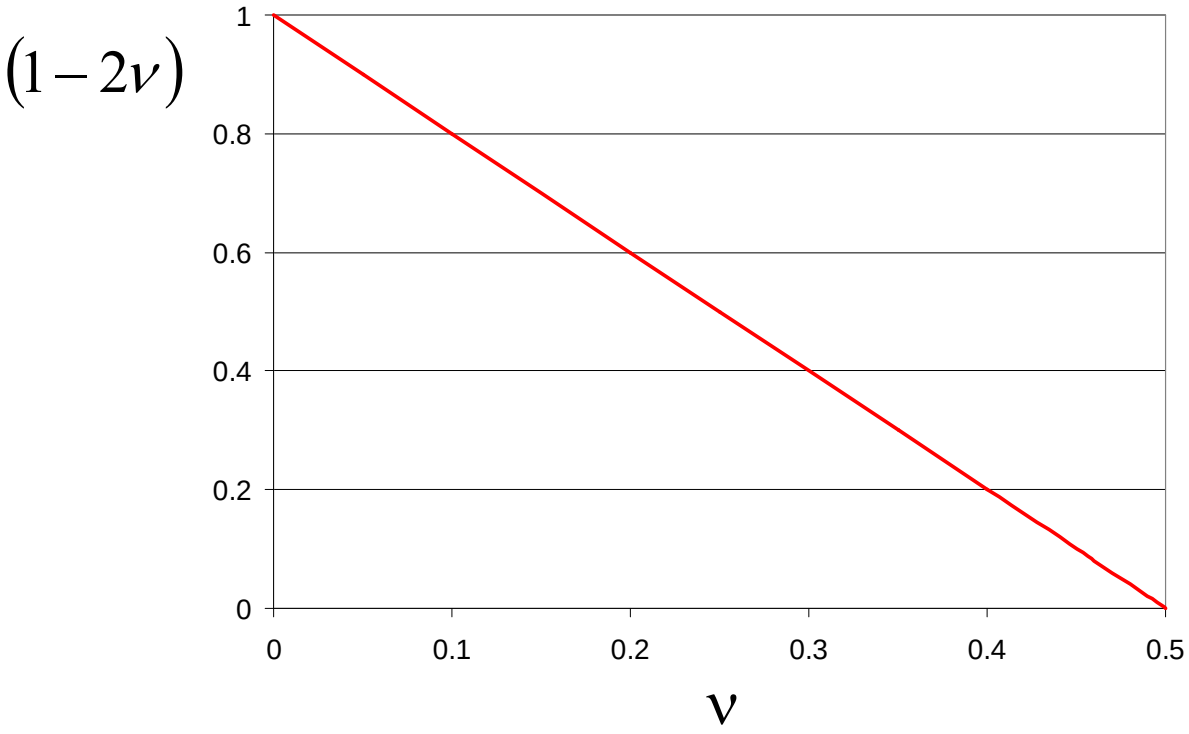
Dehnung in Zugrichtung:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$$

bzw. in Querrichtung:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu \frac{\sigma_1}{E}$$

Volumenänderung bei einachsiger Spannung



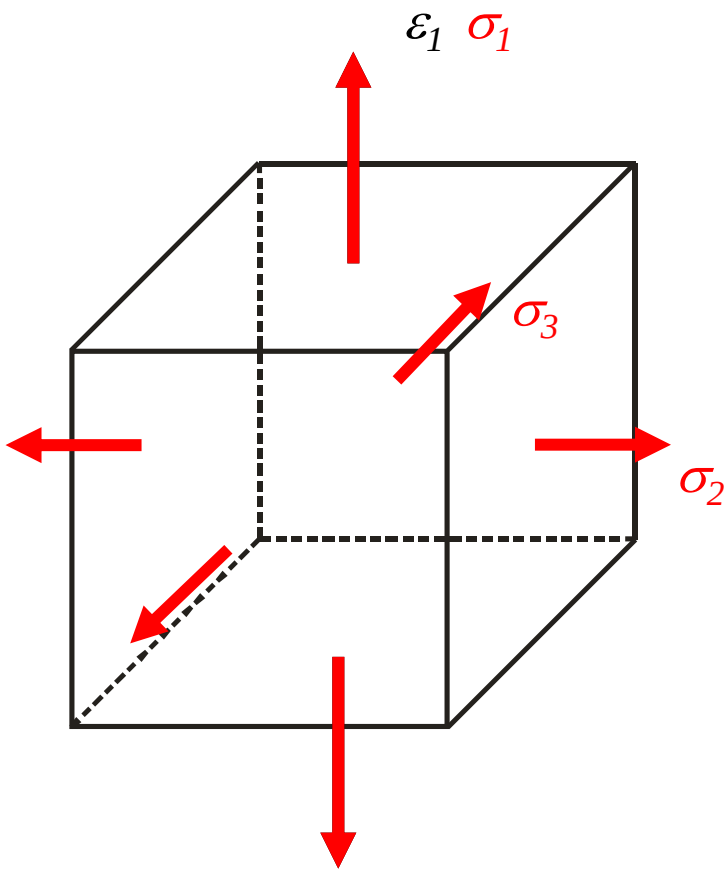
$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\sigma_1}{E}(1-2\nu) = \varepsilon_1(1-2\nu)$$

= 0 für ν = 0.5 <u>keine</u> Volumenänderung

= ε für ν = 0 max. Volumenänderung

→ $0 \leq \nu \leq 0.5$

Spezialfall 2: Einachsige Dehnung
(Totale Behinderung der Querdehnungen)



Dehnungen:

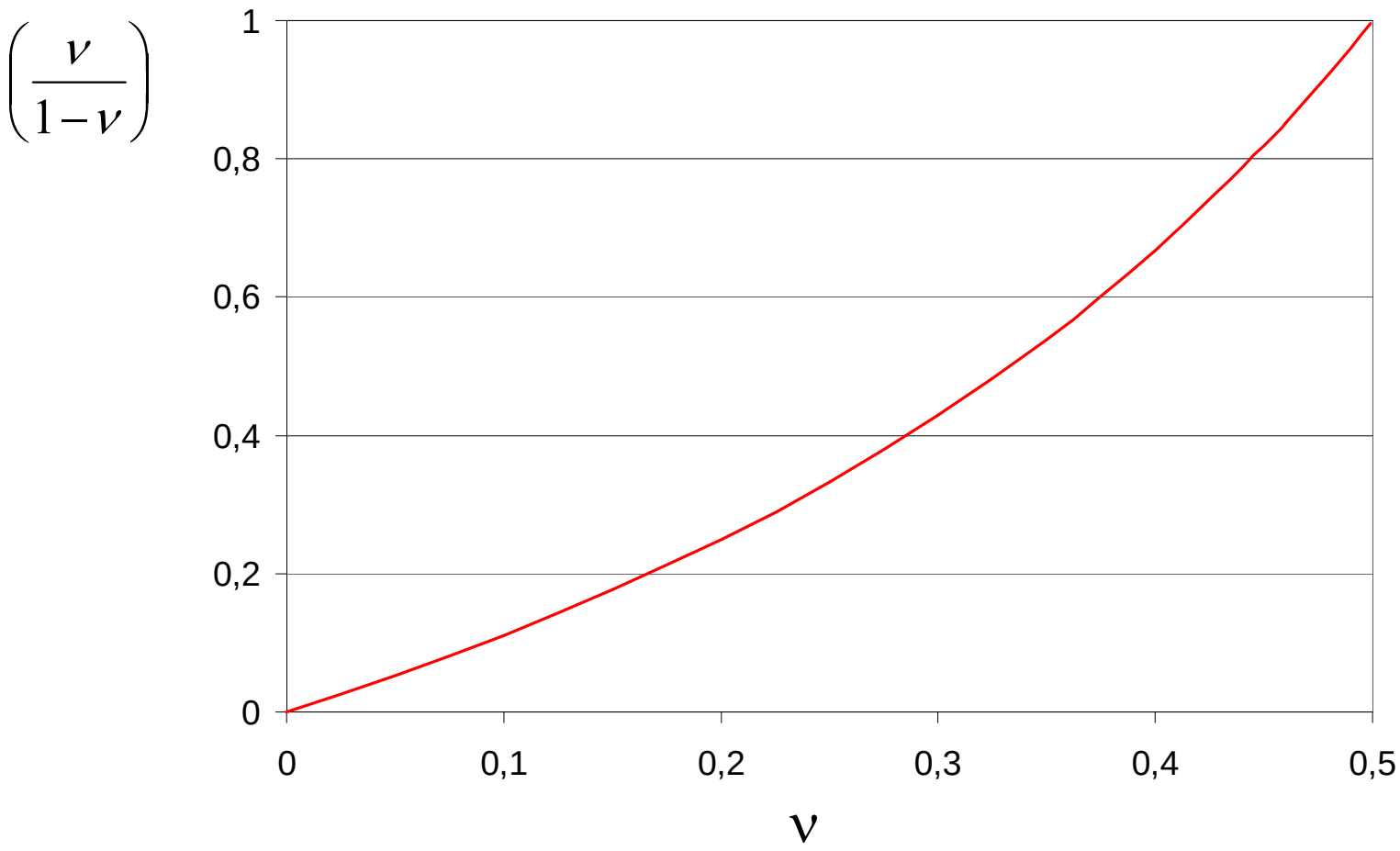
$$\varepsilon_1 \neq 0$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$$

Spannung in Zugrichtung:

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} E \varepsilon_1}$$

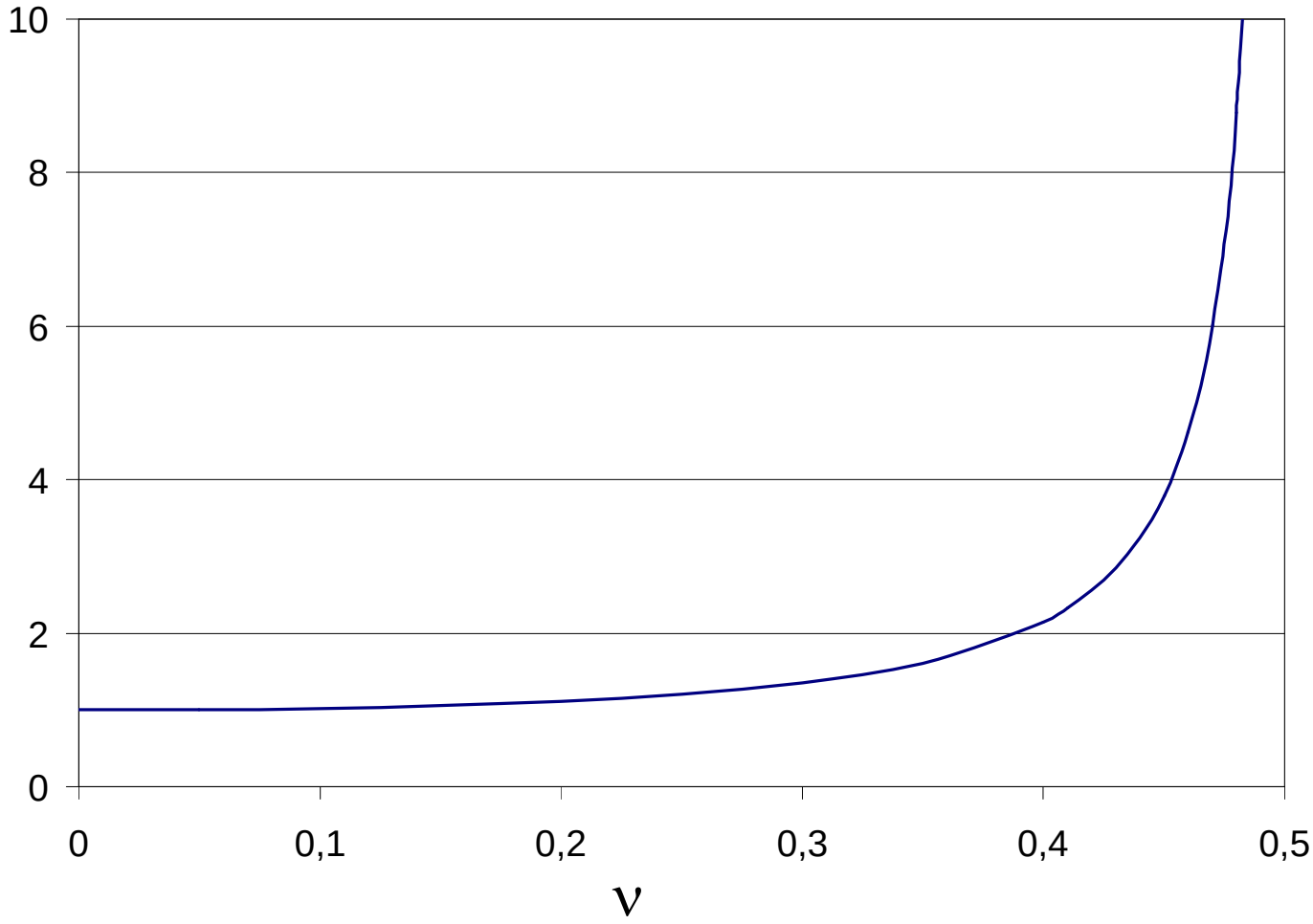
Durch die Behinderung der Querdehnung wird der Zusammenhang zwischen σ_1 und ε_1 in Abhängigkeit von ν verändert.



Beachte:

$$\left(\frac{\nu}{1-\nu}\right) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}$$

$$\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

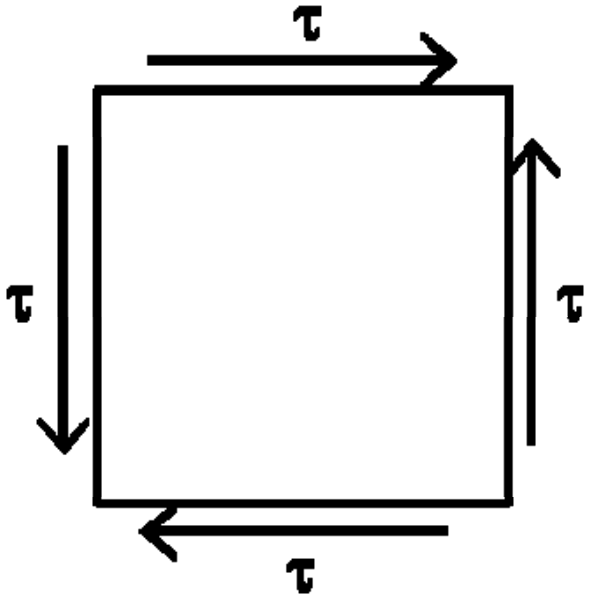


Beachte:

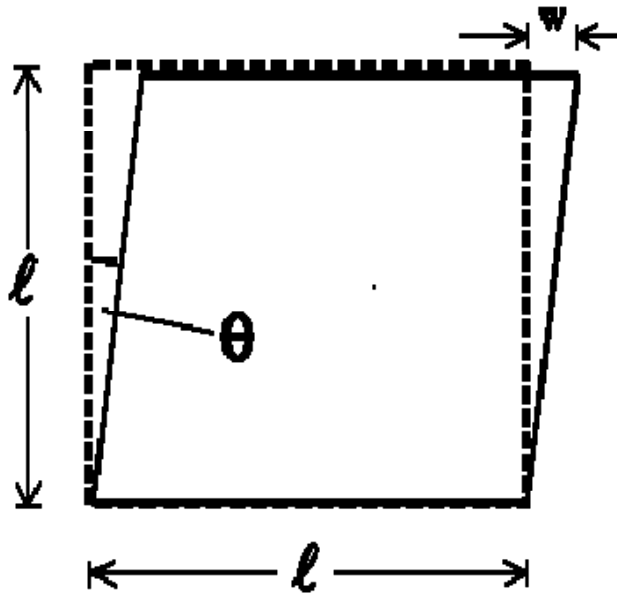
$$\left(\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\right)=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1 E}$$

1.6 Scherspannung und Scherung, Schermodul, Gestaltsänderung

Scherspannung τ



Scherung γ



Hookesches Gesetz:

$$\tau = G \cdot \gamma$$

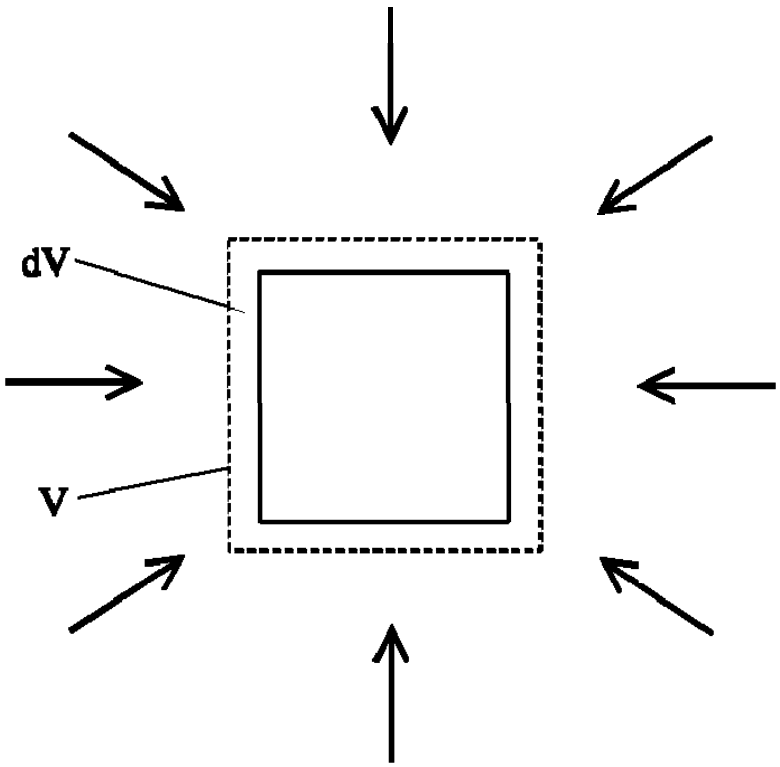
G … Schermodul (auch: Schubmodul)

$$\gamma = \frac{w}{\ell} = \tan\theta$$

$\approx \theta$ für kleine Scherungen

1.7 Hydrostatische Spannung, Kompressionsmodul, Volumenänderung

Hydrostatischer Druck *p*
(3-dimensional)



Hydrostatische Spannung:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$$

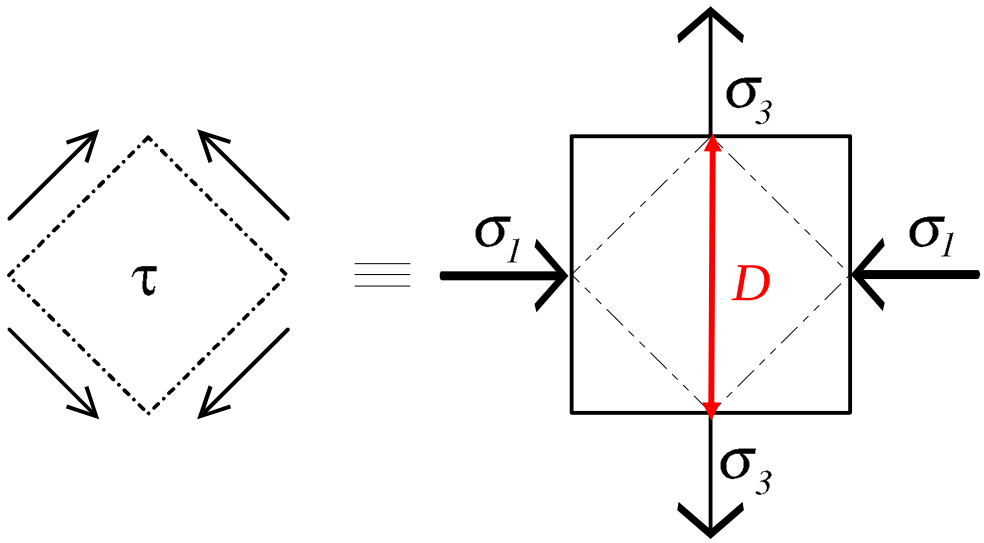
Kompressionsmodul:

$$K = \frac{-p}{\Delta V / V}$$

1.8 Zusammenhang zwischen E, G, K und ν

1.8.1 G, E und ν

Ein reiner Scherspannungszustand entspricht nach Drehung des Koordinatensystems um 45° einem speziellen zweiachsigen Spannungszustand.

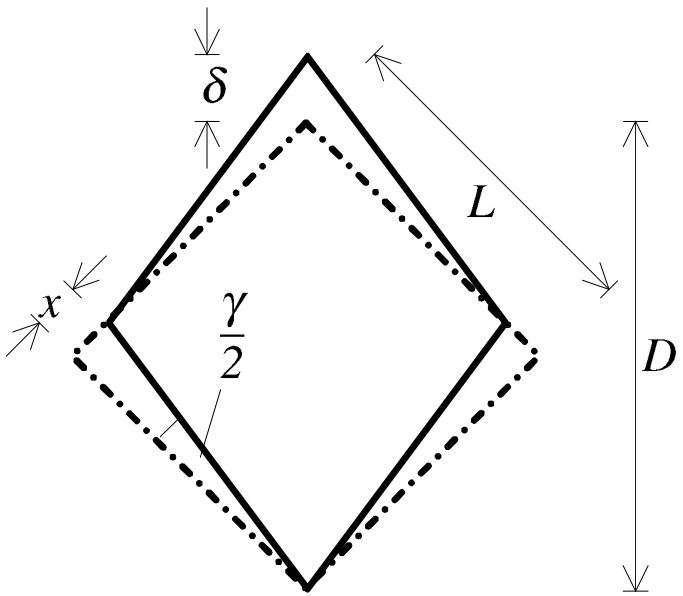


Es gilt (Beweis folgt in Kap. 2):

$$\sigma_3 = -\sigma_1 \equiv \tau$$

$$\sigma_2 = 0$$

Die relative Verlängerung der Flächendiagonalen D ist unmittelbar mit der Scherung γ verknüpft:



Für die kleine Scherungen γ gilt in guter Näherung:

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{x}{L}$$

Mit $x = \frac{1}{2}\delta\sqrt{2}$ und $D = L\sqrt{2}$ ergibt sich:

$$\frac{\delta}{D} = \frac{\gamma}{2}$$

Ersetzt man gemäß dem Hookeschen Gesetz

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\delta}{D} = \frac{\tau}{2G}}$$

Nun betrachten wir die *Dehnung* des durchgezogen eingezeichneten Volumenelementes. Hier gilt:

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E} = \frac{\tau}{E} - \nu \frac{-\tau}{E} = \frac{\tau}{E}(1+\nu)$$

Die Dehnung ε_3 ist identisch mit der relativen Verlängerung der Diagonalen D:

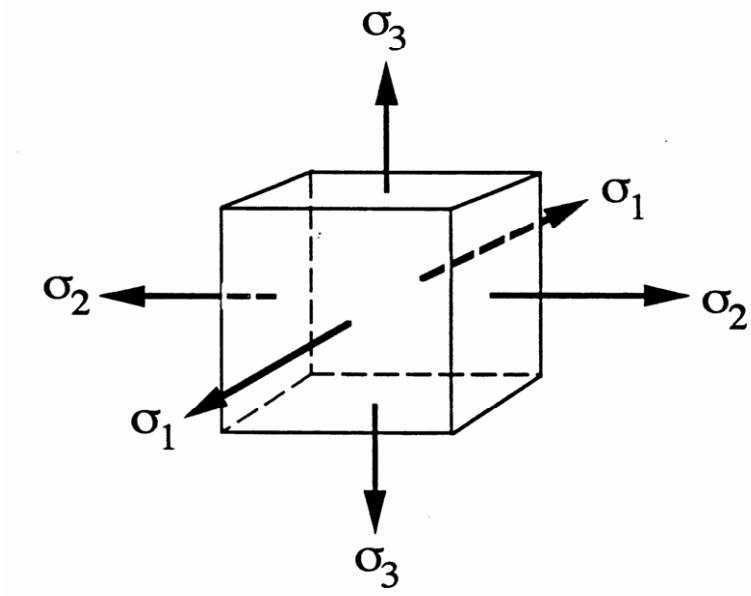
$$\varepsilon_3 = \frac{\delta}{D}$$

Damit folgt für den Zusammenhang zwischen G, E und ν:

$$\boxed{\frac{\tau}{E}(1+\nu) = \frac{\tau}{2G} \quad \Leftrightarrow \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

1.8.2 K, E und ν

Man betrachte Würfel unter Normalspannungen σ_1, σ_2 und σ_3:



$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_3}{E}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_3}{E}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \nu\frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E}$$

$$\underbrace{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}_{\frac{\Delta V}{V}} = \frac{1-2\nu}{E}\underbrace{\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)}_{-3p}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{K = \frac{-p}{\Delta V / V} = \frac{E}{3(1-2\nu)}}$$

und $\nu \leq 0.5$

1.8.3 Zusammenfassung

Sind E und ν bekannt, so lassen sich G und K berechnen:

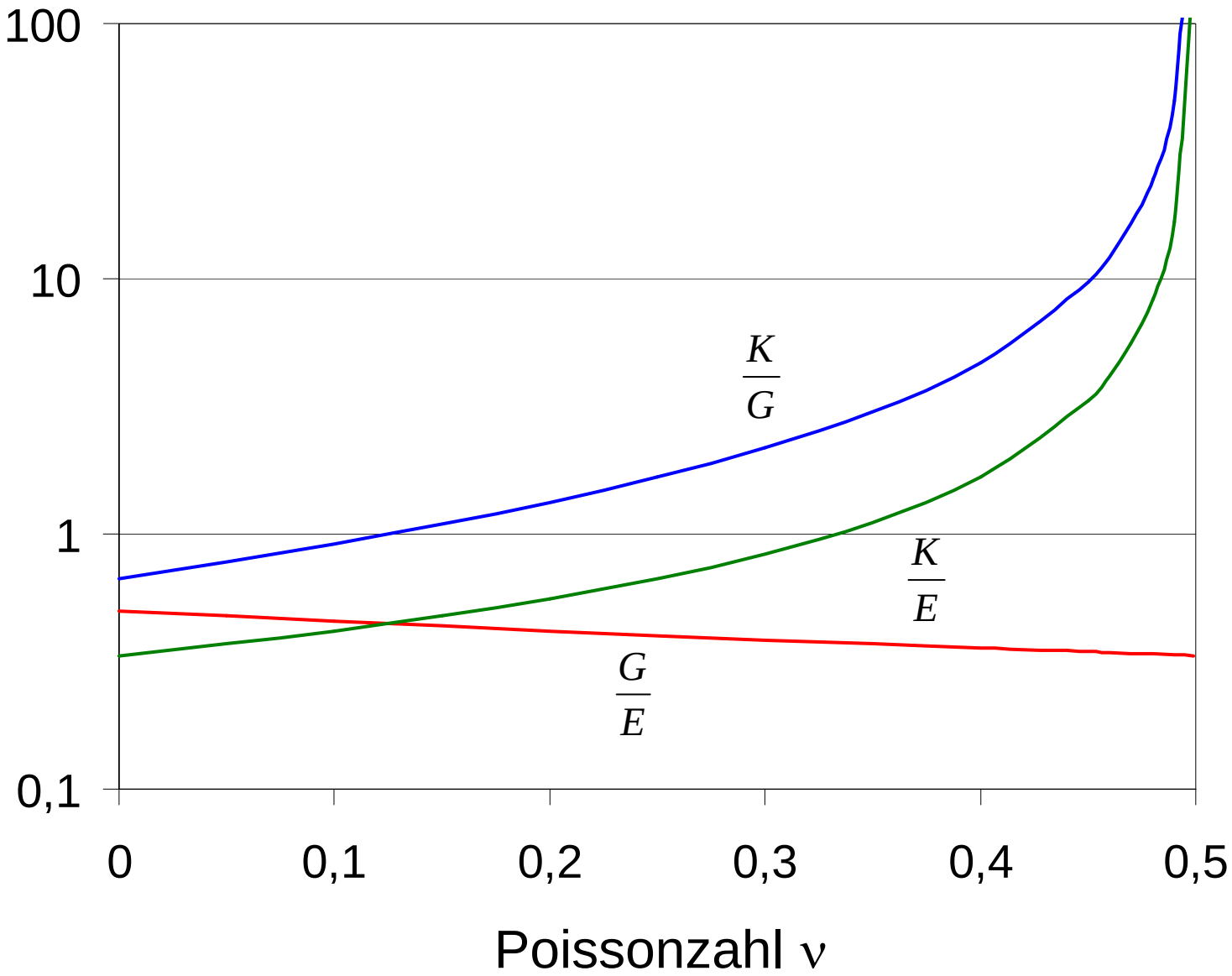
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Von den vier Kenngrößen E, ν, G und K sind somit nur zwei unabhängig.

Das elastische Verhalten lässt sich durch die Angabe von zwei Kenngrößen vollständig beschreiben

<u>Wichtig:</u> **Dies alles gilt nur bei elastisch isotropen Materialien!!**


100
10
1
0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
Poissonzahl ν
K/G
K/E
G/E

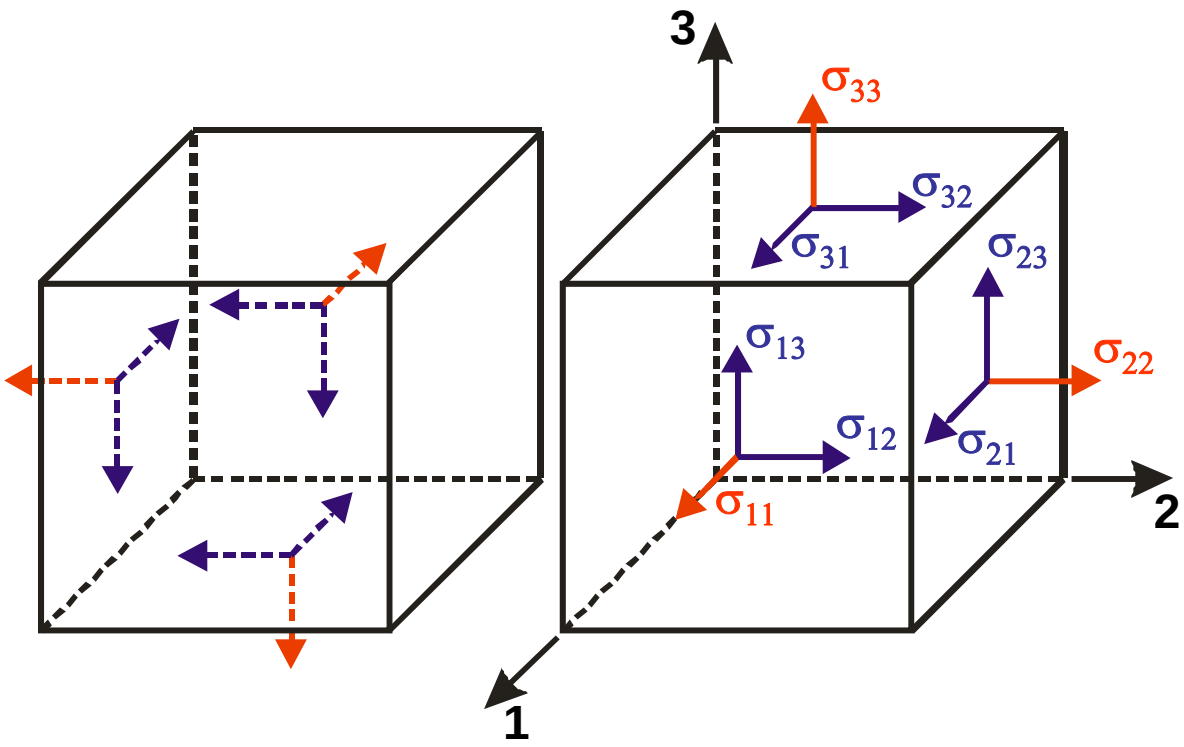
2 Allgemeine Spannungs- und Dehnungszustände

2.1 Der Spannungstensor

Der Spannungstensor beschreibt den Spannungszustand an einem gegebenen Punkt eines Festkörpers vollständig.

Der Spannungszustand (und damit der Spannungstensor) kann unabhängig vom Ort sein („homogener Spannungszustand“) oder – unter Einhaltung bestimmter Bedingungen – von Punkt zu Punkt variieren („inhomhogener Spannungszustand“).

2.1.1 Definition des Spannungstensors



$$\sigma_{ij} = \lim_{\Delta A_i \to 0} \frac{\Delta f_{ij}}{\Delta A_i}$$

mit Δf_{ij}: Kraftkomponente, die auf die Fläche ΔA_i in Richtung von x_j wirkt

„Normalspannungen“: σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}

„Scherspannungen“: σ_{12}, σ_{13}, σ_{21}, σ_{23}, σ_{31}, σ_{32}

„<u>Tensor</u>“: „vermittelt“ linear zwischen zwei Vektoren

$$\boxed{df_i = \sigma_{ij} \cdot dA_j}$$

Vektor: Kraft auf Fläche dA_j

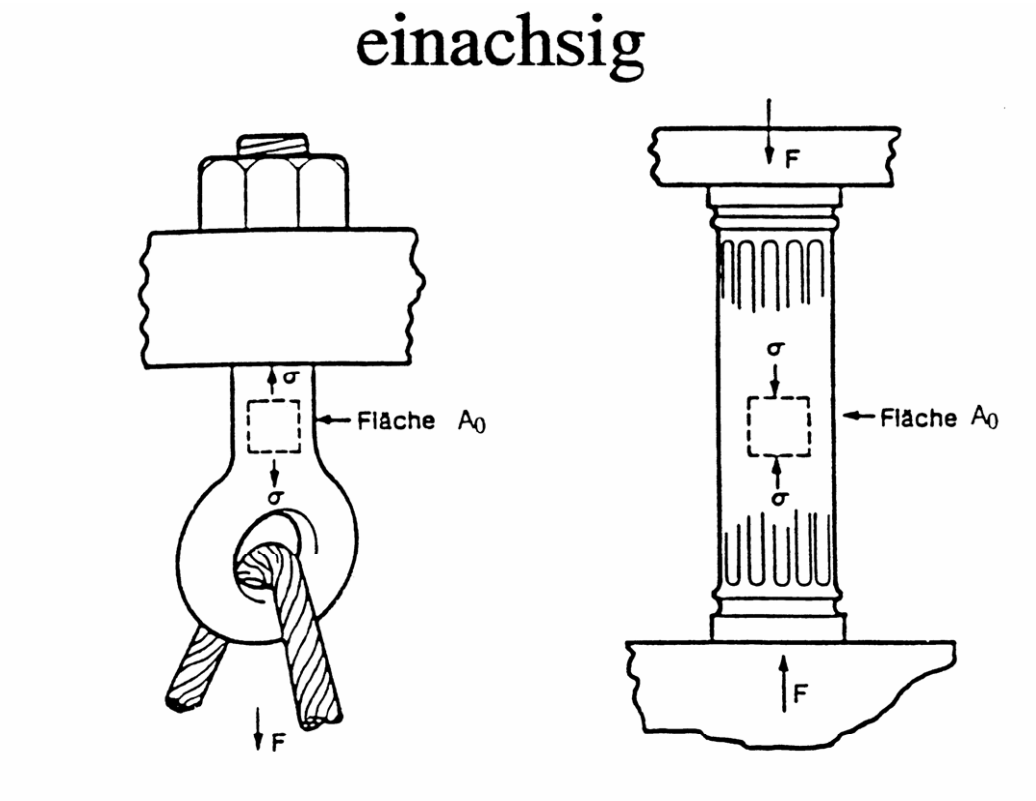
Vektor: Flächennormale

Schreibweisen:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

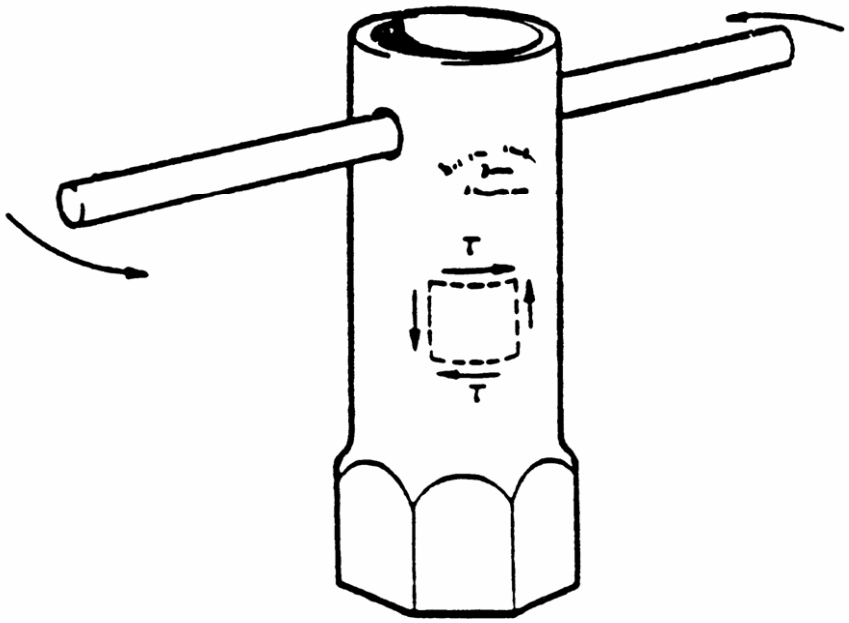
$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

2.1.2 Besondere Spannungszustände



$$\begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

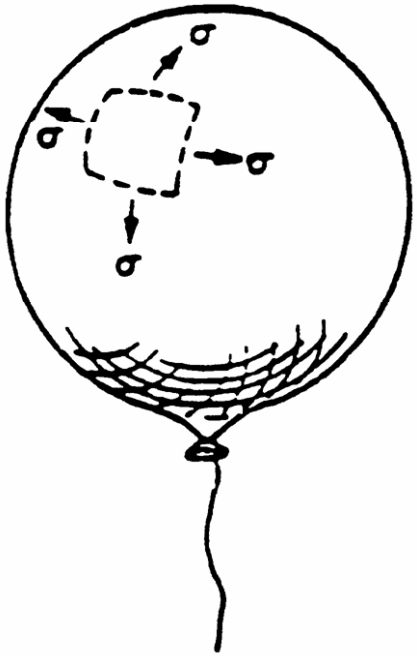
Scherung



$$\begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

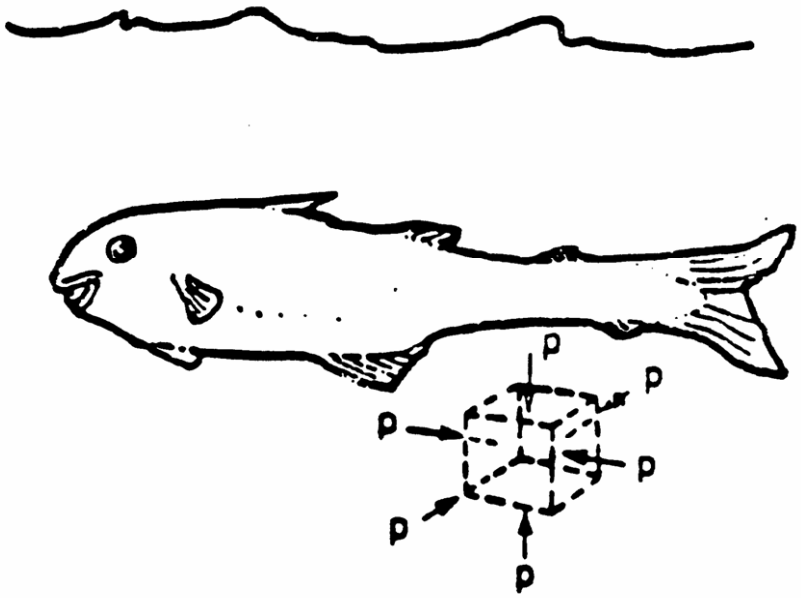
$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zweiachsig



$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hydrostatisch



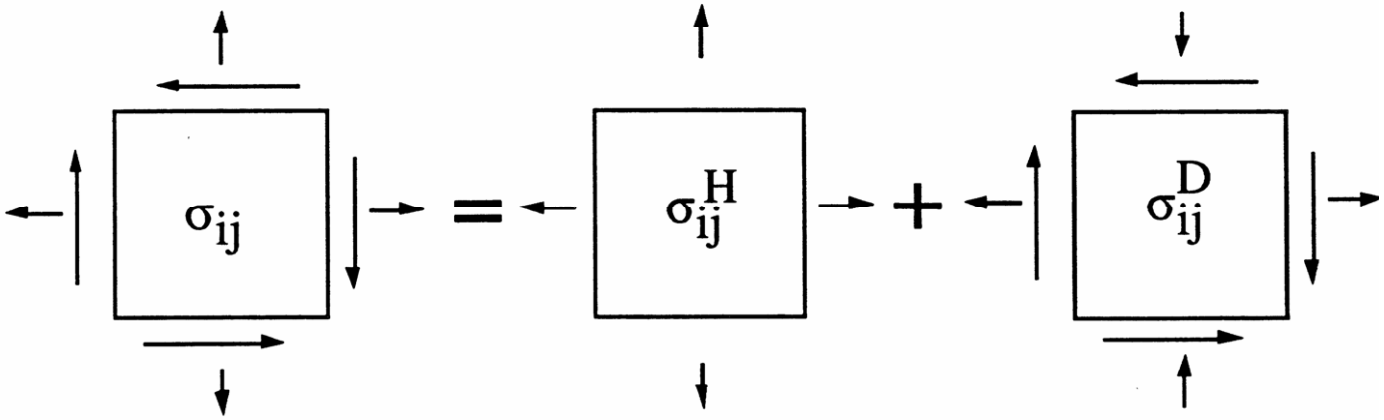
$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

2.1.3 Eigenschaften des Spannungstensors

1) Symmetrisch: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ $\rightarrow$ 6 Komponenten

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

2) zerlegbar in hydrostatischen und deviatorischen Anteil



$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{pmatrix}$$

wobei:

$$\boxed{\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})}$$ „hydrostatische Spannung“

„Spur“

hydrostatischer Druck: $p = -\sigma_m$

hydrostatisch: Volumenänderung
deviatorisch: Gestaltänderung

3) Deviator ist zerlegbar in 5 reine Scherspannungszustände

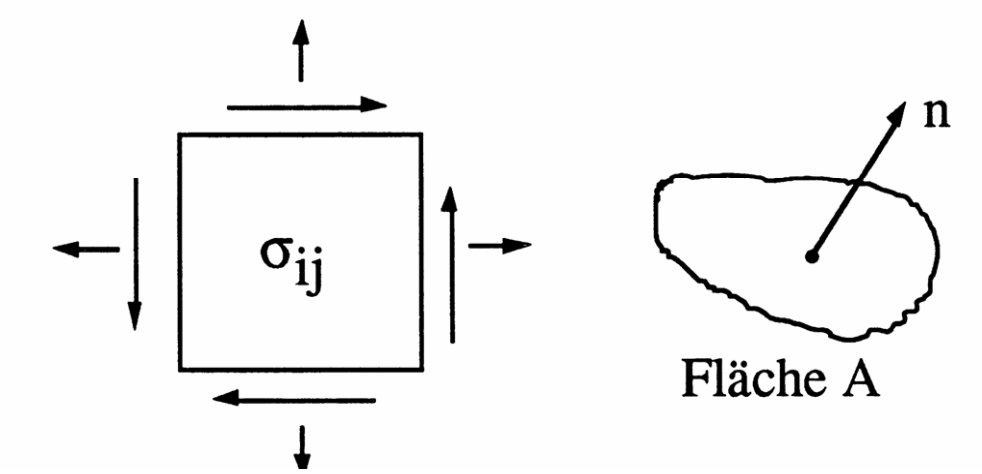
$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^D & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^D & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{11}^D & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_{11}^D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_{33}^D & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}^D \end{pmatrix}$$

Beachte, es gilt:

$$\sigma_{ii}^D = \sigma_{ii} - \sigma_m, \sigma_{22}^D = -\sigma_{11}^D - \sigma_{33}^D \text{ und } \sigma_{11}^D + \sigma_{22}^D + \sigma_{33}^D = 0.$$

4) Zusammenhang mit Spannungsvektor („Traktion“)



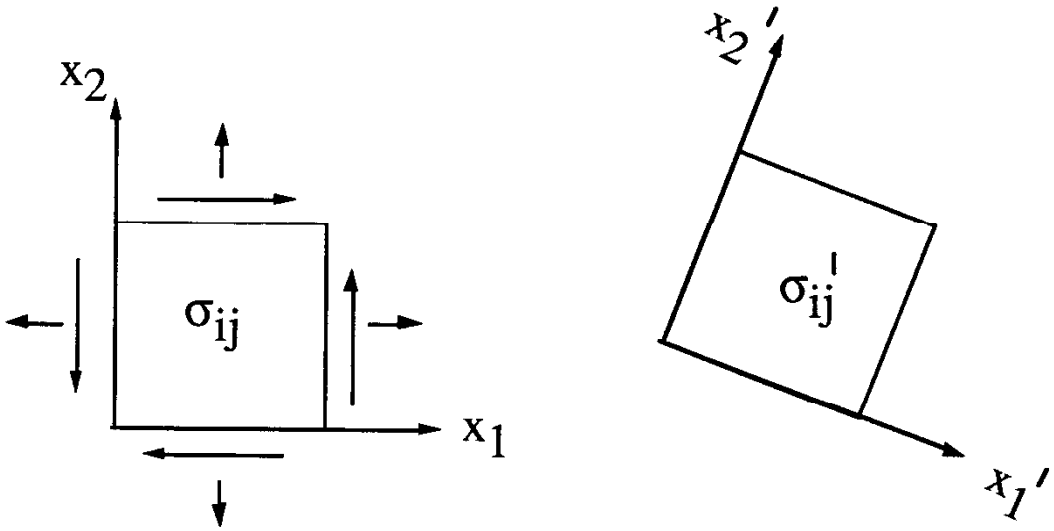
Welche Kraft (pro Einheitsfläche) wirkt auf die Fläche mit der Orientierung $\vec{n}$? $|\vec{n}| = 1$

$$\boxed{\vec{T} = \sigma_{ij} \cdot \vec{n}}$$ (Matrizenmultiplikation)

Normaltraktion: $\left|T^{(n)}\right| = \vec{T} \cdot \vec{n}$

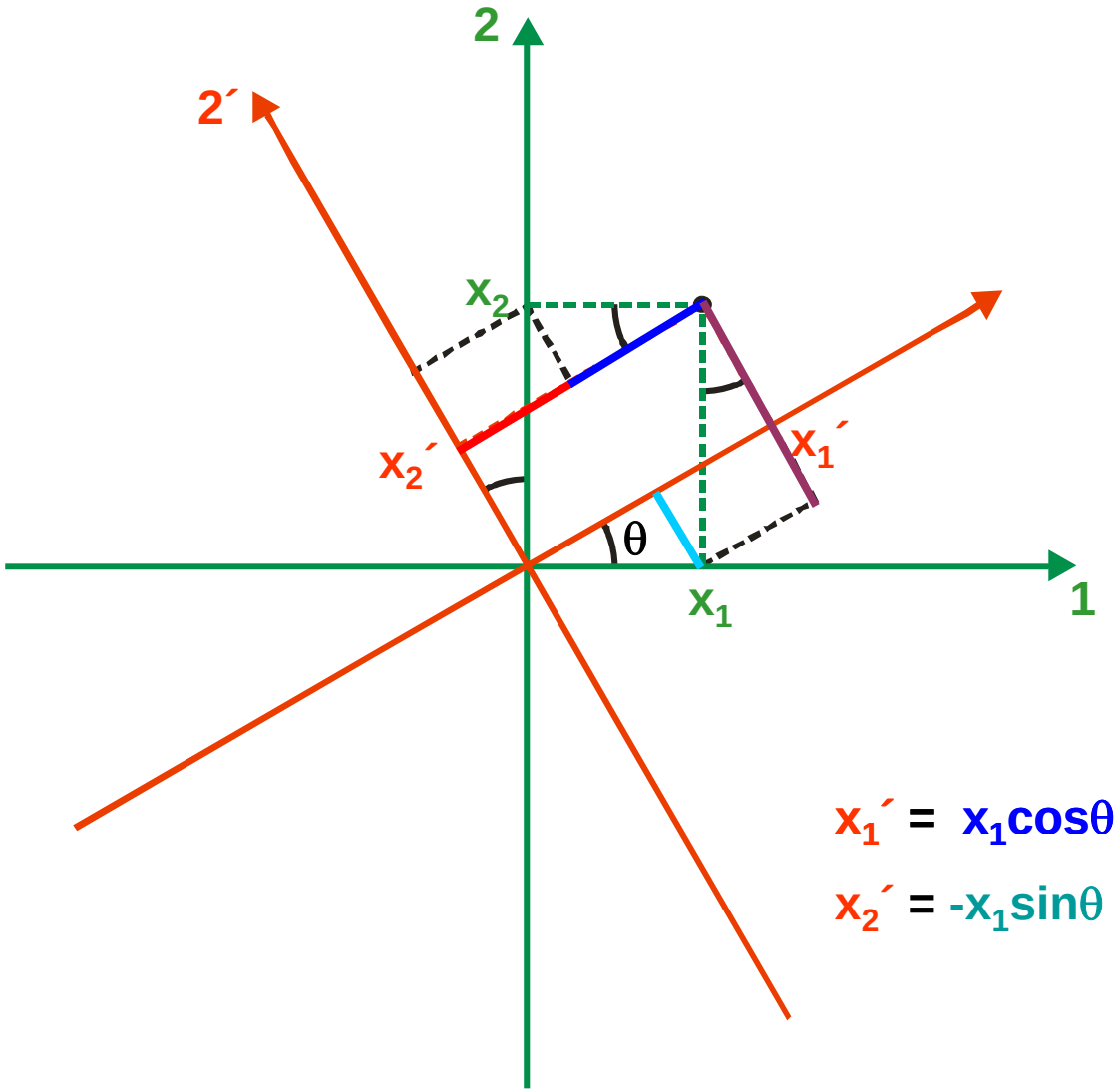
Schertraktion: $\left|T^{(s)}\right|^2 = |T|^2 - \left|T^{(n)}\right|^2$

2.1.4 Drehung des Koordinatensystems



$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{13} & \sigma'_{23} & \sigma'_{33} \end{pmatrix} = ?$$

Drehung des Koordinatensystems (2D)



$$x_1' = x_1\cos\theta + x_2\sin\theta$$

$$x_2' = -x_1\sin\theta + x_2\cos\theta$$

Transformation (3D):

Bilde die Transformationsmatrix

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} cos(x'_1,x_1) & cos(x'_1,x_2) & cos(x'_1,x_3) \\ cos(x'_2,x_1) & cos(x'_2,x_2) & cos(x'_2,x_3) \\ cos(x'_3,x_1) & cos(x'_3,x_2) & cos(x'_3,x_3) \end{pmatrix}$$

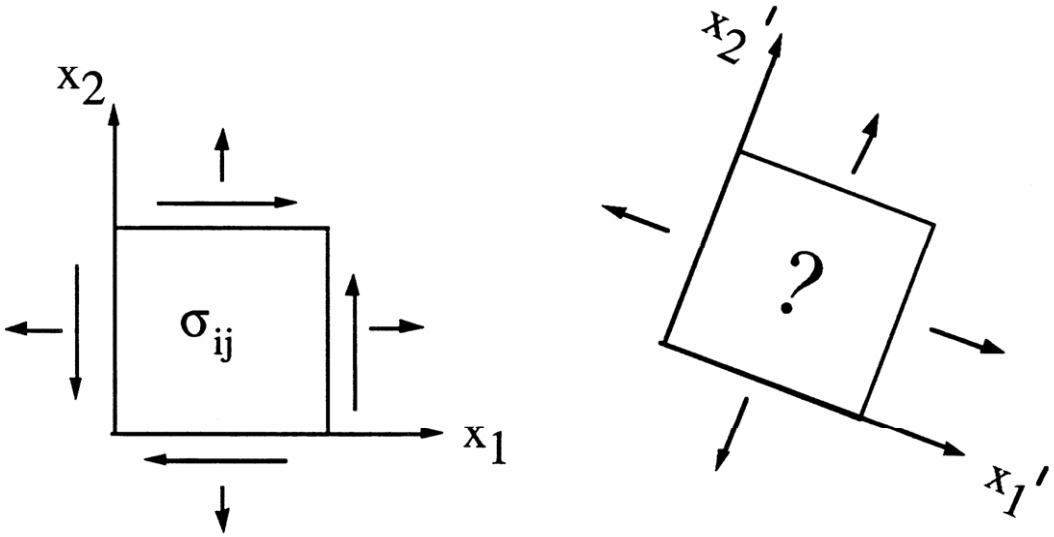
und ihre Transponierte

$$D_{ij}^T = \begin{pmatrix} \cos(x'_1,x_1) & \cos(x'_2,x_1) & \cos(x'_3,x_1) \\ \cos(x'_1,x_2) & \cos(x'_2,x_2) & \cos(x'_3,x_2) \\ \cos(x'_1,x_3) & \cos(x'_2,x_3) & \cos(x'_3,x_3) \end{pmatrix}$$

Da D_{ij} eine orthonormale Matrix ist, gilt: $D_{ij}^T = D_{ij}^{-1}$

Transformierter Spannungstensor: $\sigma'_{ij} = D_{ij} \cdot \sigma_{ij} \cdot D_{ij}^T$

2.1.5 Hauptachsentransformation
Hauptnormalspannungen, Hauptschubspannungen

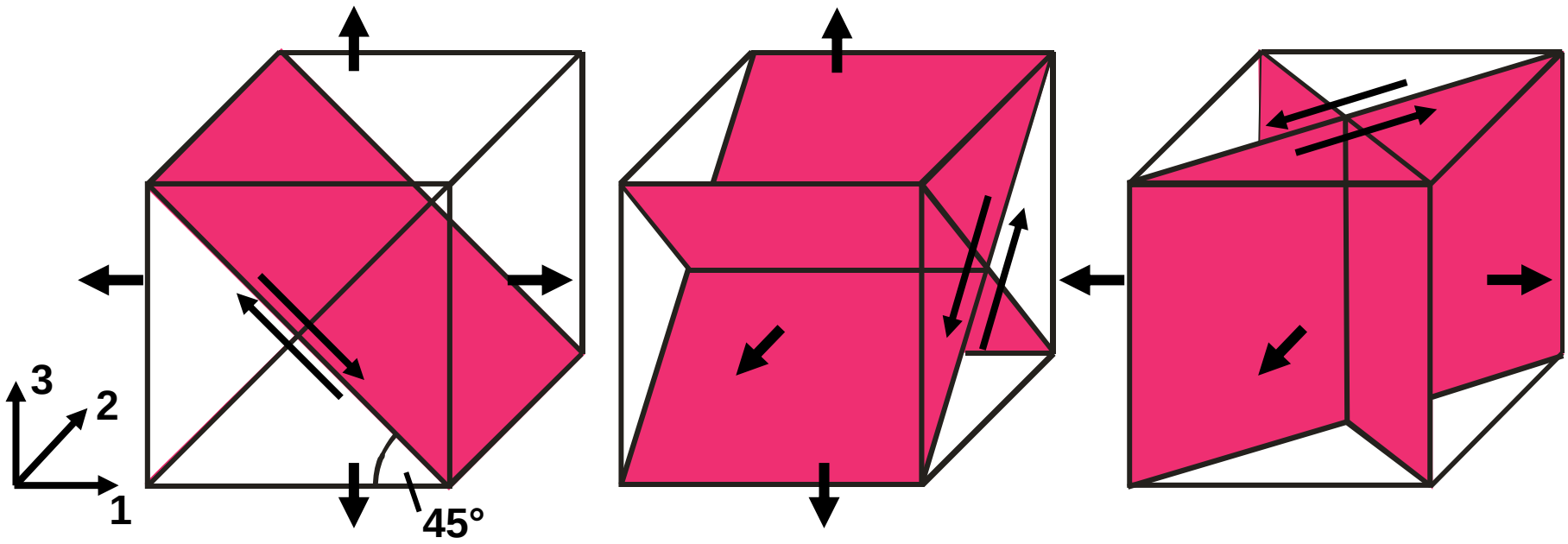


$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Hauptachsenlage: alle $\sigma_{ij} = 0$ für $i \neq j$

Hauptnormalspannungen: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (Konvention: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$)

2.1.6 Hauptschubspannungen



$$\tau_2 = \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \qquad \tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \qquad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

2.1.7 Invarianten des Spannungstensors

Invarianten sind charakteristische skalare Größen, die unabhängig vom Koordinatensystem immer den gleichen Wert annehmen. Die wichtigste Invariante ist die Spur, die proportional zur hydrostatischen Spannung ist.

Man erhält die Invarianten aus folgender Überlegung:

Für die von der Wahl des Koordinatensystems unabhängigen Eigenwerte des Spannungstensors gilt (vgl. Kap. 2.1.5):

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11}-\lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}-\lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Die Auswertung der Determinante führt auf folgende kubische Gleichung:

$$
\begin{aligned}
&-\lambda^3 + \lambda^2\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right) \\
&-\lambda\left(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2\right) \\
&+\left(\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2\right) = 0
\end{aligned}
$$

Die drei Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 sind nur dann von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig, wenn die Koeffizienten in dieser kubischen Gleichung ebenfalls von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig sind.

Die Gleichung vereinfacht sich damit zu:

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$$

mit

$$\boxed{I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_2 &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2 \\ &= \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_3 &= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 \\ &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}}$$

Fließkriterien

Tresca (Maximum shear stress Theory):

$$\sigma_o = 2\tau_{\max} = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$$

Von Mises (Distortion energy Theory):

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2\right]^{1/2}$$

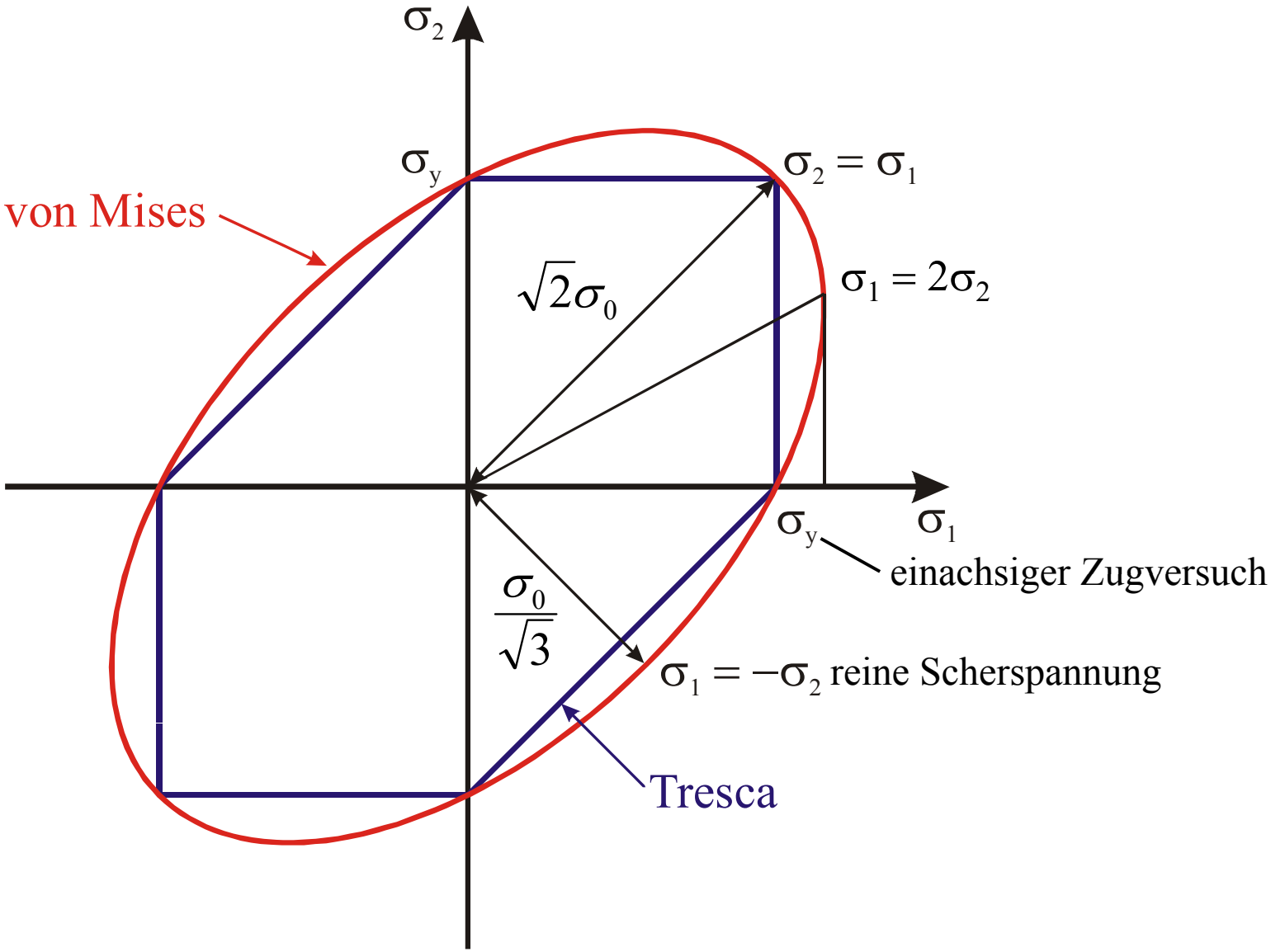
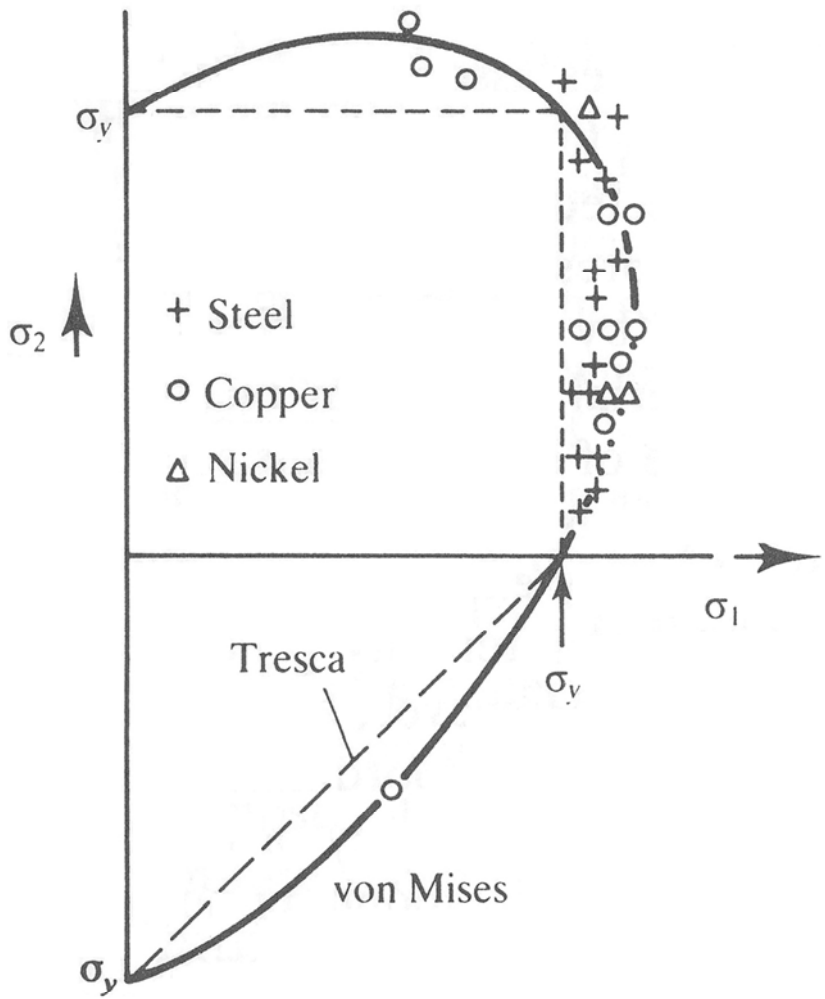
Fließen tritt ein, wenn gilt:

$$\boxed{\sigma_0 \geq \sigma_y}$$

Vergleichsspannung berechnet nach einer der obigen Gleichungen

Fließspannung im einachsigen Zug- oder Druckversuch

Vergleich Tresca und von Mises für ebenen Spannungszustand ($\sigma_1, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$):



Vergleich mit experimentellen Daten: